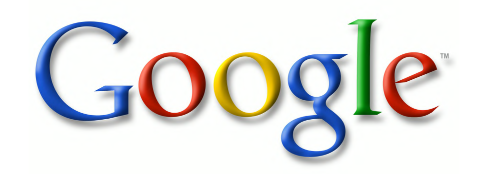



SIGILLVM ACADEMIÆ HARVARDIANÆ IN NOV: ANG:
CHRISTO ET ECCLESIÆ
937
Bought with
the Fund bequeathed by
Horace A. Haven,
of Portsmouth, N.H.
(Class of 1842.)
Rec'd. 2. Dec. 1851.

This volume is the first
of the Sammlung. See Kayser
and Hindenburg

Der polynomische Lehrsatz

das

wichtigste Theorem

der

ganzen Analysis

nebst

einigen verwandten und andern Sätzen

Neu bearbeitet und dargestellt

von

Tetens, Klügel, Kramp, Pfaff und Hindenburg.

Zum Druck befördert

und mit

Anmerkungen, auch einem kurzen Abrisse der combinatorischen Methode und ihrer Anwendung auf die Analysis

versehen

von

Carl Friedrich Hindenburg.

Leipzig

bey Gerhard Fleischer dem Jüngern

1796.

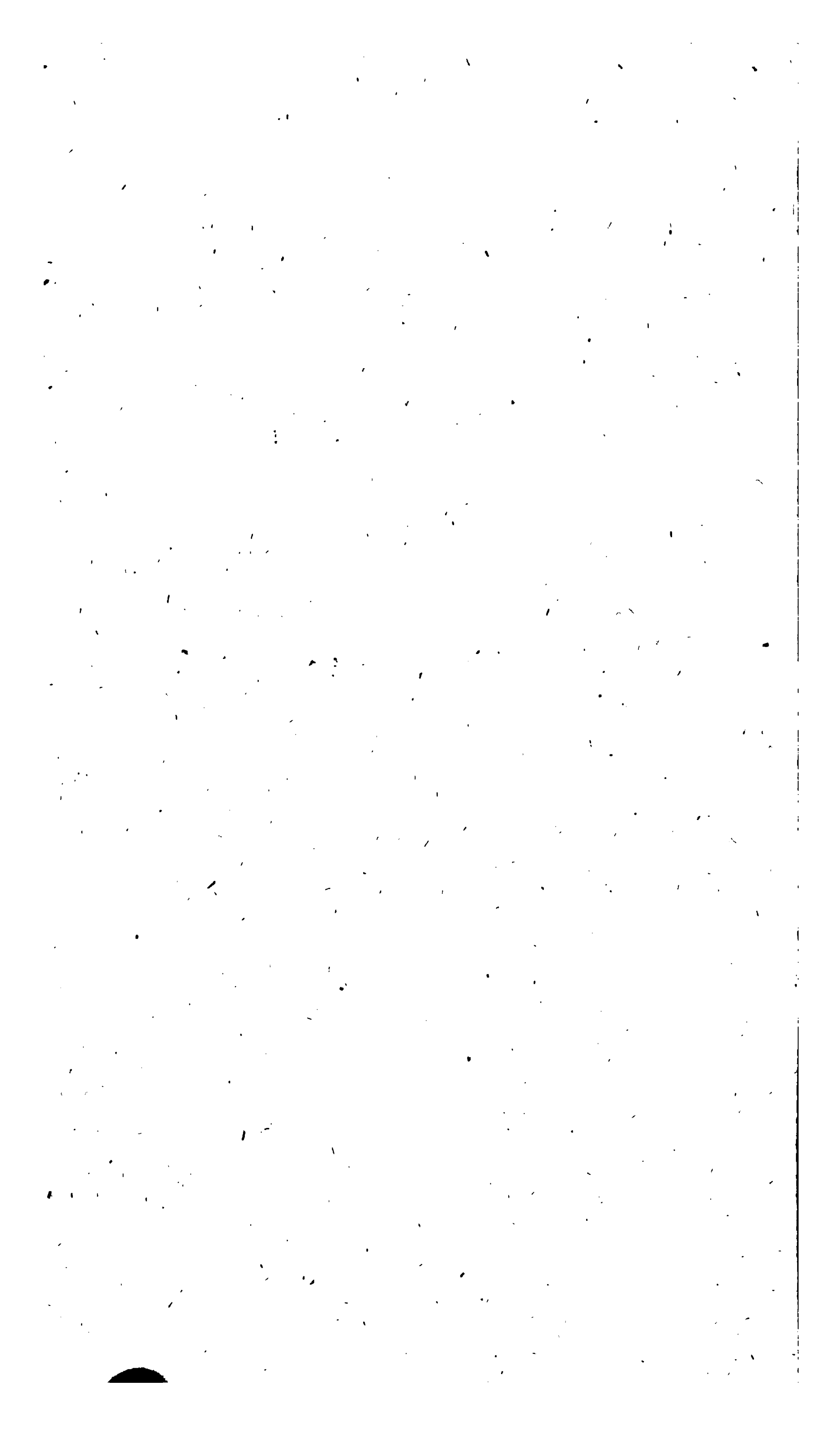
Sr. Hochwohlgebohrnen

dem

Herrn

Obristwachtmeister von Zach

zu Gotha.



Ew. Hochwohlgebohrnen

haben meine bisherigen Bemühungen, die Analysis durch Anwendung der Combinationsmethode und einer, größtentheils darauf sich gründenden, allgemeinen Zeichensprache zu erweitern, mit Ihrem sehr schätzbaren Beyfalle beehrt, und dadurch, so wie durch die thätigste Mitwirkung zu schneller Ausbreitung, diesen Kenntnissen bereits mehrere Kenner und Liebhaber im Auslande gewonnen, die auf dem gewöhnlichen Wege, zumal bey den Hindernissen, die den Wissenschaften itzt überall in den Weg treten, nur erst spät, Manche vielleicht gar nicht, dazu gelangt seyn würden.

Gegenwärtige Schrift von mir, die hier in Begleitung einiger fremden sehr wichtigen Aufsätze verwandten Inhalts erscheint, ist recht eigentlich dazu bestimmt, alles Dunkele, das

über der Sache noch zu schweben schien, alle Misverständnisse, die sich nach und nach dabey eingefunden hatten, gänzlich zu zerstreuen. Wie weit ich hierinn glücklich gewesen bin, werden Ew. Hochwohlgebohrnen am besten urtheilen können. Nehmen Sie diese Schrift für das an, was sie nach meiner Absicht seyn soll — ein öffentliches Denkmal der lebhaftesten Dankbarkeit und innigsten Hochachtung, womit ich die Ehre habe zu verharren,

Ew. Hochwohlgebohrnen

Leipzig,
den 20. August
1796.

ganz ergebenster,

Carl Friedrich Hindenburg.

Vorbericht.

Die folgenden Aufsätze waren mir nach und nach zum Einrücken ins Archiv der reinen und angewandten Mathematik zugesendet worden. Die Wichtigkeit ihres Inhalts und der Umstand, daß, wegen der nöthigen Abwechselung der Materien, nicht alle in Ein Heft kommen konnten, brachten mich zu dem Entschlusse, selbige, als einen ersten Beytrag zum Archive, besonders herauszugeben, und mit einer etwas ausführlichen Abhandlung von mir, die combinatorische Analysis betreffend, zu begleiten.

Den ersten Aufsatz über das Polynomialtheorem erhielt ich durch Herrn Hofrath Kästner, dem selbiger von Herrn Etatsrathe Tetens zur Mittheilung fürs Archiv war zugesendet worden. Er ist in mehr als einem Betrachte merkwürdig: theils wegen der vielen nützlichen Bemerkungen, die hier gelegentlich vorkommen, theils aber und vorzüglich, wegen eines darinn aufgeführten neuen, sehr einfachen Substitutionsverfahrens, welches an Leichtigkeit und Kürze

der Entwickelung und Darstellung des polynomischen Lehrsatzes, alle übrigen nicht-combinatorischen bey weitem übertrifft. Herr Etatsrath Tetens hat hier durch sein blos analytisches Verfahren, wie er es nennt, alles geleistet, was die Analysis, auf den bisher allein bekannten Wegen, nur immer zu leisten vermag. Es ist die für diesen Satz am weitesten getriebene Annäherung zur Combinationsmethode, mit welcher es, wie ich gezeigt habe, von einer und derselben Grundformel ausgeht, in die es auch ohne Schwierigkeit sich auflösen läßt. Die Vorzüge der Combinationsmethode sind Allgemeinheit und Leichtigkeit; auch ist kein anderes Verfahren an ihrer Stelle vermögend, das Wesentliche combinatorischer Involutionen darzustellen oder zu erreichen.

In der darauf folgenden zweyten Abhandlung hat Herr Professor Klügel das Polynomialtheorem in der größten Ausdehnung in Betrachtung gezogen, hat gleich Anfangs seiner beiden Hauptformen, der direct-combinatorischen (von doppelter Art) und der involutorisch-recurrirenden, Erwähnung gethan, auch beide in der Folge ausführlich abgehandelt. Zuerst wird angemerkt (worauf man nicht immer gehörig Rücksicht genommen zu haben scheint), daß die eigentliche Analysis überhaupt die Formen der Größen zum Gegenstande habe, woraus sogleich einestheils die große Nützlichkeit der Combinationsmethode, deren wichtigstes Geschäft die Entwickelung, Darstellung und Betrachtung

solcher Formen ausmacht, anderntheils aber die unmittelbare Anwendbarkeit dieser Methode in der Analysis ganz ungezwungen sich ergiebt. Herr Professor Klügel empfiehlt auch daher die combinatorischen Operationen, die Darstellung der möglichen Gattungen von Combinationen, vornehmlich aber die combinatorischen Involutionen, auf deren genauen Kenntniß und Einsicht so vieles beruhe, ganz vorzüglich. Es wird ferner gezeigt, die involutorische Form des polynomischen Lehrsatzes, ob schon die Differentialrechnung dabey als bequeme Abkürzung des Vortrages gebraucht werden könne, sey gleichwohl darum kein Eigenthum der Differentialrechnung, sondern dieser Satz gehöre der Analysis des Endlichen zu; das könne auch nicht anders seyn, weil sonst die Analysis endlicher Größen, die diesen so wichtigen Satz in seiner Allgemeinheit nicht entbehren kann, kein für sich bestehendes Ganze seyn würde. Der polynomische Lehrsatz wird übrigens hier, in seinen beiden combinatorischen Formen, unabhängig von dem Binomialtheorem (das als ein Corollarium von jenem abgeleitet wird) für jede Gattung von Exponenten erwiesen. Herr Professor Klügel hat die Allgemeinheit seines Beweises auf den Satz gestützt, daß die analytischen Operationen, Multiplication, Division, Erhebung zu Potenzen u. s. w. nur allein die Form des zu Suchenden aus der Form des Gegebenen bestimmen, die Größen aber unbestimmt lassen (blos die Form der entwickelten Function, ohne bestimmte Größe, darstellen); daher denn auch die verschiedene Größe und Beschaffenheit der Exponenten, auf die (von der Größe

der Bestandtheile ganz unabhängige) Form der entwickelten Potenz keinen Einfluß habe. Zuletzt werden noch einige Schwierigkeiten wegen irrationaler, veränderlicher und unmöglicher Potenzexponenten aus dem Wege geräumt.

Die drey folgenden Abhandlungen von Herrn D. Kramp und Herrn Prof. Pfaff erstrecken sich nicht blos auf den polynomischen Lehrsatz, sondern zugleich auf verschiedene andere, mehr oder weniger, zum Theil auch gar nicht damit verwandte Sätze, in so fern sie sich durch dieselbe, bey den übrigen Sätzen gebrauchte, Methode ergaben. Die von mir diesen wichtigen Aufsätzen beygefügten Vorerinnerungen überheben mich der Mühe, eine kurze Inhaltsanzeige davon hier beyzubringen. Ich will nur so viel überhaupt erinnern. Herr D. Kramp hat sehr frühzeitig die große Wichtigkeit und den ausgebreiteten Nutzen der combinatorischen Analysis anerkannt, und hinterher selbst thätigen Antheil an Bearbeitung und mehrerer Ausbreitung dieses ganz neuen Zweiges der Analysis genommen. Was ich davon hier aufgestellt habe, wird die Güte der Methode, und die Ausdehnung, die sie in der Anwendung zeigt, hinreichend bestätigen. Mehrere Sätze, die mir Herr D. Kramp, mit ihrer combinatorisch-analytischen Behandlung, zugesendet hat, konnten hier nicht Platz finden, theils, weil sie zu spät eintrafen, theils aber auch, weil ich diese Sammlung von Abhandlungen nicht über die Gebühr zu stark durfte anschwellen lassen. Die beiden hier befindlichen Aufsätze von

Herrn Professor Pfaff, wird man nicht ohne Nutzen mit drey andern desselben Verfassers im ersten, dritten und fünften Hefte des Archivs für reine und angewandte Mathematik vergleichen, und nicht ohne Vergnügen den Antheil bemerken, den dieser vortrefliche Analyst an der neuen Methode genommen hat, und wie tief er in den Geist derselben eingedrungen ist. Insbesondere hat Herr Professor Pfaff den großen Nutzen meiner Lokalzeichen und Formeln sehr anschaulich vorgelegt, dergestalt, daß er jedem, durch das hier und a. a. O. Beygebrachte, den Beyfall abdringen kann, welcher an dem, was in der Anmerkung zu seinem hiesigen ersten Satze von den Vortheilen dieser Zeichen und ihres Gebrauchs von ihm ist erinnert worden, noch zweifeln wollte.

Dieser so vielfache Beyfall von der einen Seite, und die aufgeworfene Frage von der andern; ob nicht die Combinationsmethode und ihre Anwendung auf die Analysis, so einfach auch die dabey zum Grunde liegenden Sätze und Verfahren seyn mögen, selbst bey der ihr zugestandenen Brauchbarkeit, bey dem polynomischen sowohl als verschiedenen andern analytischen Sätzen; ob nicht die Combinationsmethode bey jenem und allen übrigen Sätzen ganz entbehrlich sey? ob man nicht durch andere Verfahren das alles eben so allgemein, eben so leicht und eben so geschwind erhalten könne? und ob nicht insbesondere das hier im ersten Aufsatze vorgeschlagene, und ausführlich dargestellte, Substitutionsverfahren ein vollkommnes Surro-

gar für die Combinationsmethode, bey dem Potenzenprobleme, abgeben könne? — Das alles zusammen hat meinen Aufsatz am Ende dieser Sammlung veranlaßt. Ich will über diese an sich schon lange Abhandlung mich hier im Vorberichte nicht erst noch weitläuftig herauslassen; ich will nur so viel mit wenigem erinnern, daß, außer dem Unterrichte den die Leser hierschöpfen können, die sich mit der Methode und ihren Zeichen erst bekannt machen wollen, meine Hauptabsicht dahin geht, alle Schwierigkeiten, die man sich hier und da dabey gemacht hat, alle Misverständnisse, in die man verfallen ist, so weit mir dieselben bekannt geworden sind, gründlich zu heben und gänzlich zu zerstreuen. Hier habe ich zugleich jene Frage eben so ausführlich beantwortet, als sie umständlich ist vorgelegt worden; und dadurch den Leser vollkommen in den Stand gesetzt, durch Abwägung der Gründe und Gegengründe selbst zu urtheilen.

Herr Professor Klügel hat hin und wieder meine Zeichen erklärt und gebraucht. Dasselbe hat Herr Professor Pfaff insbesondere mit meinen Lokalzeichen und Formeln gethan. Dadurch, und durch meine, vorzüglich den beiden ersten Abhandlungen, gleich unter dem Text beygefügten Anmerkungen, haben die Leser, denen die Sache noch neu und unbekannt ist, den unmittelbaren Vortheil, daß sie ganz unvermerkt, mit meinen Zeichen und Vorstellungen bekannt werden, ehe sie noch auf meine Abhandlung kommen, die alles in solchen Zeichen und Formeln darstellt. Man hat zuweilen

über die Menge der Zeichen geklagt; und es ist Niemanden zu verdenken, der sonst zu thun genug hat, wennn er Anstand nimmt, sich damit abzugeben, besonders so lange er über den Nutzen derselben noch ungewiß ist. Hier tritt nun der besonders günstige Umstand ein, daß man, während dem Lesen jener Abhandlungen, deren Inhalt man für entschieden wichtig hält, in Zeichen, die man vorlängst als nützliche kennt, auch jene neuen gelegentlich mit lernt, und ihre Anzahl gar nicht einmal gewahr wird, als bis man sie, bis auf einige wenige, die man leicht hinzusetzt, schon alle kennt.

So wäre denn der scheinbaren Schwierigkeit, wegen der Menge der Zeichen, woran man sich so oft gestoßen hat, vortreflich abgeholfen. Könnte ich doch jene Quelle, woraus so viele Misverständnisse fließen, eben so leicht und eben so sicher verstopfen! Man ist nehmlich sehr geneigt — und die selbstdenkende, nicht blos mechanischcalculirende, Classe ist es, wie natürlich, am allermeisten — sobald man das Hauptmoment in einer Sache wahrgenommen hat, besonders wenn sie, wie hier, so leicht und so ganz natürlich ist, seinen Autor nicht weiter zu verfolgen, und sich das Uebrige selbst hinzuzudenken. Das kann nun zwar auf an und für sich richtige, nicht aber immer zur Hauptsache passende Vorstellungen leiten, und muß oft, wie mich die Erfahrung gelehrt hat, Misverständnisse und Misdeutungen veranlassen. Ein sehr bewährtes und wirksames Mittel dagegen, zuverlässig das Einzige in sei-

ner Art, das aber eine große Selbstverläugnung voraussetzt, ist das von Rousseau anempfohlene: *En lisant chaque Auteur, je me fis une loi d'adopter et suivre toutes ses idées, sans y mêler les miennes, ni celles d'un autre, et sans jamais disputer avec lui.* (Confessions Livre VI.)

I.

Formula Polynomiorum.

Eine allgemeine Formel für die Potenzen mehrtheiliger Größen

von

J. N. Tetens,

Königl. Dänischem Etatsrathe zu Kopenhagen.

Vorerinnerung.

Das Gesetz für die Coefficienten in den Polynomien hat die größten Mathematiker beschäftiget. Was Leibnitz, Jacob und Johann Bernoulli, Moivre, Colson, Castillon, Segner, Euler, Kästner, Schönberg und Hr. Prof. Hindenburg geleistet haben, findet man beysammen in der Schrift des Letztgenannten: *Infinitinomii dignitatum exponentis indeterminati Historia, Leges ac Formulae. Edit. alt. Goettingae* 1779. Die Eulersche und vom Hrn. Kästner in ihrer Allgemeinheit bewiesene Formel ist völlig analytisch; sie hat nur das Unvollkommene, daß sie die nachfolgenden Coefficienten nicht außer der Reihe, sondern jeden nur mittelst der vor ihm vorhergehenden angiebt. Herr Hindenburg hat solche ganz allgemein außer ihrer Folge zu finden gelehrt, mittelst der Combinationsmethode [a]). Aber da

a) Von der Combinationsmethode und ihrer Anwendung auf die Analysis, handeln, außer den im Texte angeführten *Infin. Dign.* mein *Nov. Syst. Perm. Comb. et Variat.* (Lipsiae 1781) Töpfers combin. Analytik, und mehrere, theils einzeln

giebt alsdann die allgemeine Formel für die Coefficienten diese nicht analytisch an, nehmlich nicht so, daß nichts mehr als bekannte Substitutionen und die gewöhnlichen analytischen Operationen erfordert würden, um sie zu erhalten. Die Formel weiset mehr nur auf die combinatorischen Operationen hin, die man vornehmen muß, um die Coefficienten selbst herauszubringen [b]). Es muß also die Combinationsmethode dem bekannt seyn, der nach einer solchen Formel die Coefficienten herausbringen will. Nun ist diese Methode freylich auf ziemlich einfache [c]) Grundsätze und Operationen gebracht. Man könnte sie daher eben sowohl unter die analytischen Methoden aufnehmen, als das Differentiiren und Integriren [d]). Ihre Brauchbarkeit bey verschiedenen andern

vorhandene, theils im Archiv der rein. u. angew. Math. (Leipzig, bey Schäfer 1795) befindliche Aufsätze. Daselbst (Heft 4. S. 385—402) ist Moivre's und (S. 402—423) Boscovichs combinatorische Behandlung des Polynomialtheorems weiter von mir analysirt, und dargethan worden, daß, und warum, in ihren Verfahren, wenn man alles entwickelt und gehörig benutzt, mehr liege, als die Urheber derselben gewußt, selbst nicht einmal geahndet haben.

Hindenburg.

b) Das ist eine kurze aber getreue Darstellung meines Verfahrens überhaupt genommen, die sehr gut zu der Definition paßt, die ich unlängst (Arch. der Math. H. 4. S. 423.) von der combinatorischen Analysis gegeben habe. Ein Beyspiel einer ganz vollendeten analytisch-combinatorischen Darstellung und Entwicklung, bey einer sehr zusammengesetzten Aufgabe, in meinem Programm: *Ad Serier Reuers. Paralip* (1793); Arch. der Math. H. 1. S. 17. in der Note. H.

c) Man kann vielmehr sagen: ganz einfache — da die combinatorischen Operationen (wie ich die regelmäßige Darstellung von Permutationen, Combinationen und Variationen zu nennen pflege) offenbar viel einfacher und leichter sind, als die arithmetischen, die nichts weiter als bedingte combinatorische sind. Arch. der Mathem. H. 1. S. 22. H.

d) Das wird auch gewiß geschehen, und hätte, nach Herrn Professor Pasquich's Urtheile (Unterricht in der mathem. Analys. 1 B. Vorr. S. XI.) schon längst geschehen sollen. Wie wichtig die combinatorischen Operationen, vornehmlich aber

analytischen Problemen ist auch anerkannt. Aber dennoch erfordert sie besondere, von den übrigen analytischen Operationen ganz verschiedene Arbeiten, denen man lieber entgeht, wenn sich ihnen entgehen läßt [e]). Ich habe daher geglaubt, es verlohne sich der Mühe, und es sey gewissermaßen noch eine Erweiterung der Analysis, eine andere blos analytische Formel für die Potenzen zu suchen, wobei man die Combinationsmethode nicht nöthig habe. Eine solche ist diejenige, die ich hier vorlege. Wenn man sie in ihrer ersten einfachen Gestalt nimmt, so sind gleich-

die Involutionen (Arch. d. Math. H. 1. S. 13 u. f.), und zwar recht eigentlich in analytischer Hinsicht, zu bequemer Umwandlung der Formen und schneller Darstellung ihrer Glieder, nach vorgeschriebenen Gesetzen, sind, hat Herr Prof. Klügel in der nächstfolgenden Abhandlung vortreflich gezeigt; auch stützt sich die combinatorische Form unmittelbar auf Gründe, welche die allerersten in der Analysis sind, so, daß sie ohne weitere Vorbereitung, als wegen der Bezeichnung, gefaßt werden kann. H.

e) Aus dieser Stelle und der bald darauf folgenden Aeusserung am Schlusse dieser Vorerinnerung „die Combinationsmethode „könne durch völlig analytische Verfahren (darunter hier die „bis itzt bekannten und üblichen verstanden werden, mit Aus„schließung jener Methode, als einer noch nicht allgemein in „die Analysis an- und aufgenommenen) nicht nur bey dem po„lynomischen, sondern auch bey andern Problemen ganz ent„behrlich gemacht werden.“ — Aus dieser Aeußerung erhellet deutlich, daß Herr Etatsrath Tetens in den Gedanken steht, die Combinationsmethode könne nichts schaffen, was man nicht durch andere völlig analytische (in obiger Bedeutung des Worts) Verfahren eben so leicht und geschwind erhalten könne. Eine aufmerksame unpartheiische Vergleichung beider Verfahren und eine reifliche Erwägung der in der nächstfolgenden Abhandlung beygebrachten triftigen Gründe, über die Wichtigkeit combinatorischer Operationen und Involutionen in der Analysis, kann hier nur allein entscheiden. Noch muß ich erinnern, daß Herr Professor Klügel bey Abfassung seines Aufsatzes, von Herrn Tetens Abhandlung und ihrem Inhalte nichts gewußt habe, und daß folglich der Beyfall, mit welchem er sich für die Combinationsmethode und ihre Aufnahme in die Analysis erkläret, zwar an sich bedeutend, dennoch aber in Rücksicht auf jene Abhandlung ganz zufällig ist.

H.

wohl noch fernere Substitutionen [f]), oder Entwickelungen, erforderlich, wo die Coefficienten, die man sucht, aus mehreren, verschiedenen Produkten bestehen. Sie können sogar eine große Menge dergleichen enthalten. Alsdenn aber wird von diesen nur Eine Art unmittelbar, die übrigen in ganzen Klassen oder Geschlechtern angegeben, und um sie alle aus einander gesetzt zu haben, muß man die Klassen von neuen aus einander legen. Aber dieß letztere geschieht durch bloße analytische Substitutionen, zufolge derselben allgemeinen Formel, ohne daß eine andere Operation mit den Größen dabey nöthig werde, und die Combinationsmethode wird hiebey ganz entbehrlich. Dieß wird sie auch bey andern analytischen Problemen, wo man seine Zuflucht zu ihr genommen hat.

---

1. Zwey Arten von Polynomien sollen hier in Betracht kommen. Die eine von der Form

$(a + bx + cx^2 + + qx^r + +)^n$ oder

$(ax + bx^2 + cx^3 + + qx^r + +)^n$, und ähnliche, worinn die Theile von einander unterschieden und durch die Potenzen der veränderlichen Größe x, und nach diesen Potenzen, geordnet werden. Die Coefficienten der Potenzen von x in der Dignität n sind die, welche angegeben werden sollen. Sie mögen aus sehr vielen Theilen bestehen; sie werden als einzelne Coefficienten angesehen. Es sey nämlich:

$(a + bx + cx^2 + + qx^r)^n = A + Bx + Cx^2 + + Qx^r$,

so sind A, B, C... Q die anzugebenden Coefficienten des Polynomii.

f) Die combinatorisch-analytische Methode bedarf, wie man finden wird, dieser fernern, oft sehr zahlreichen, Substitutionen nicht; sie läßt die combinatorische Formel, wie sie in ihrer ersten einfachen Gestalt gegeben, oder aus der Localformel abgeleitet worden (unten Note k), und schaft daraus, mit Beihülfe des Zeigers, unmittelbar und ohne weitere Umstaltung, die Werthe ihrer Glieder nach der Reihe. H.

Die Polynomien von der Form $(ax+bx^2++qx^{r})^n$, die keinen Coefficienten zu x^0 haben, können leicht auf die von der andern Form $(a+bx++)^n$ zurückgebracht werden. Jene Form soll hier als allgemein für die erste Art angenommen werden.

Die zwote Art der Polynomien wird durch die Formel $(a+b+c++q)^n$ ausgedrückt. In dieser werden die Theile als verschiedene Theile angesehen, die entweder verschiedene Größen des gegebenen Polynomii, a, b, c.. q als Faktoren enthalten, oder dieselben in verschiedenen Potenzen. Die Ordnung und Folge der Theile wird bestimmt nach der Folge der Buchstaben a, b, c.. und nach den Potenzen von diesen. Z. E. a^n geht vor $a^{n-1}b$ vorher, $a^{n-1}b$ vor $a^{n-1}c$; dieß vor $a^{n-1}d$, u. s. f. Auch alle, worin a^{n-1} ein Faktor ist, vor denen, die a^{n-2} enthalten, als $a^{n-2}b^2$, $a^{n-2}bc$, u. s. f.

2. Das Polynomium $a+bx+cx^2++qx^r$, dessen Coefficienten als gegeben angesehen werden, und eben so $a+b+c++q$, soll das ursprüngliche Polynomium, die Grundreihe, (*series fundamentalis*) heißen. In dem Produkte zweyer Polynomien von der Form $(a+bx+cx^2++qx^r)^n.(\alpha+\beta x+\gamma x^2++\varkappa x_\varrho)^v$ sind zwey in Hinsicht ihrer Coefficienten gegebene Grundreihen.

Eben so auch in denen von der Form
$$(a+b+c++q)^n.(\alpha+\beta+\gamma++\varkappa)^n.$$

3. Um den terminum generalem für jeden Coefficienten eines Polynomiums $(a+bx+cx^2++)^m$ bequemer zu bezeichnen, nehme man an, daß in dem ursprünglichen Polynomium, oder in der Grundreihe (2) jedesmal so viel Theile vorhanden sind, als die Ordnungszahl (numerus termini) des Coefficienten enthält. Z. B. wenn der nte bezeichnet werden soll, das ist, der zu x^{n-1} gehö-

rige, so enthalte das ursprüngliche Polynomium oder die Grundreihe, $a + bx + +$ gleichfalls *n* Theile. Ist jenes ein infinitum, so enthält es allemal wirklich so viel, besteht es aber aus weniger Theilen, so kann man für die fehlenden Coefficienten Nullen setzen. Z. B. wenn in $(a + bx + cx^2 + dx^3)^4$ der sechste Coefficient, der zu x^5 gehörige, gefunden werden soll, so nehme man für das ursprüngliche Polynomium an: $a + bx + cx^2 + dx^3 + 0 . x^4 + 0 . x^5$.

So folget, daß der numerus termini des Coefficienten, den man bezeichnen will, und die Anzahl der Theile in dem Stücke des ursprünglichen Polynomiums (der wirklichen allein, oder die angenommenen mit dazu gezählt) das zu dieser Bezeichnung gebraucht werden kann, jedesmal gleich groß sind.

Die ersten Coefficienten des ursprünglichen Polynomiums $a + bx + cx^2 + +$, welche bestimmt anzugeben sind, werden durch die Buchstaben a, b, c u. s. f. bezeichnet; die letztern, die man unbestimmt angeben soll, kann man durch den numerum termini n, mit einiger Veränderung, auf diese Art, $|n|$, ausdrücken. So ist $|n|$ der nte, $|n-1|$ der $(n-1)$te u. s. f.

Der *terminus generalis* der Coefficienten für den nten in $(a + bx + cx^2 + + |n| x^{n-1})^m$ kann also durch das Stück des ursprünglichen Polynomiums bis zum nten Coefficienten genommen, (diesen eingeschlossen) in der Potenz m und durch ein vorgesetztes T auf folgende Art bezeichnet werden: $T(a + bx + + |n| x^{n-1})^m$.

Diesen Ausdruck kann man abkürzen, ohne Verlust des Bezeichnenden in ihm. Da die Potenzen von x, die zu jedem besondern Coefficienten gehören, deren Ordnungszahl man weiß, sich von selbst ergeben, so kann man für den obigen Ausdruck den folgenden setzen: $T(a + + |n|)^m$.

Es ist nehmlich nur der erste und der letzte von den Coefficienten des ursprünglichen Polynomiums anzugeben, da die dazwischen fallenden ohnedieß bekannt sind.

Wenn $m = 1$, so ist $T(a + + |n|)$ selbst $|n|$.

Nach denselben Regeln ist $T(b + + |n|)^m$ der so vielte Coefficient in $(b + cx + dx^2 + + |n| x^{n-2})^m$, als Theile in $b + cx + + |n| x^{n-2}$ sind, das ist, so viele, als in dem ursprünglichen Polynomium sind, welches mit b anfängt, und mit $|n|$ aufhöret, worinn die zwischenfallenden Coefficienten dieselben sind, wie in $a + bx + cx^2 + + |n| x^{n-1}$; dieß ist wiederum so viele, als es Theile giebt in $(b + + |n|)$. Hier ist aber ein Theil, nehmlich der erste a weniger, als in $a + bx + cx^2 + + |n| x^{n-1}$.

Und $T(b + + |n-1|)^m$ ist der so vielte Coefficient in $b + cx + +$ als in $(b + + |n-1|)$ Theile sind g).

g) Solche Ausdrücke willkührlicher Coefficienten oder Glieder der Potenzen der Polynomien $a + bx + cx^2 \ldots = p$, oder $b + cx + dx^2 \ldots = q$, oder $c + dx + ex^2 \ldots = r$ u. s. w. als in diesem dritten §. vorgelegt und erklärt worden sind, nenne ich Lokalausdrücke, und die aus ihnen zusammengesetzten Formeln, Lokalformeln, weil durch sie nicht unmittelbar die Werthe selbst (hier der Coefficienten, in andern Fällen der Glieder) angegeben, sondern nur ihre Stellen nachgewiesen werden.

Um nun die *terminos generales* des Textes (die Coefficienten der Potenzglieder), hier und in der Folge, in meine Lokalzeichen geschwind umsetzen zu können, dient folgende Vergleichung:

$$T(a + + |n|)^m = p^m \varkappa n$$
$$T(a + + |n-1|)^m = p^m \varkappa (n-1)$$
$$\text{,} \qquad \text{,} \qquad \text{,} \qquad \text{,}$$
$$T(b + + |n|)^m = q^m \varkappa (n-1)$$
$$T(b + + |n-1|)^m = q^m \varkappa (n-2)$$
$$\text{,} \qquad \text{,} \qquad \text{,} \qquad \text{,}$$
$$T(c + + |n|)^m = r^m \varkappa (n-2)$$
$$T(c + + |n-1|)^m = r^m \varkappa (n-3)$$
$$\text{,} \qquad \text{,} \qquad \text{,} \qquad \text{,}$$

u. s. w. u. s. w.

4. Satz I. Es sey die Reihe

$$a + bx + cx^2 + \cdots + |n| x^{n-1} = p$$

in $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \cdots + |\nu| x^{n-1} = \pi$

zu multipliciren, so ist der Coefficient zu x^{n-1}, [das ist, der nte Coefficient vom Anfange an] h) in dem Produkte

$$(a + bx + \cdots + |n| x^{n-1}) \cdot (\alpha + \beta x + \cdots + |\nu| x^{n-1})$$

eine Summe von Produkten, welche herauskommen, wenn der erste Coefficient des einen Faktors mit dem (n)ten des andern, der zweyte aus jenem mit dem (n-1)ten aus diesem, und so ferner, der nächstfolgende aus dem ersten mit dem nächst vorhergehenden aus dem zweyten, multiplicirt wird, d.i. wenn die ersten n Coefficienten aus dem einen Faktor mit den ersten n aus dem andern, in umgekehrter Ordnung genommen, Einer von jenen mit Einem von diesen, multiplicirt werden.

Unter $a, \quad b, \quad c, \quad d, \ldots |n-2|, \; |n-1|, \; |n|$ schreibe man $|\nu|, \; |\nu-1|, \; |\nu-2|, \ldots \quad \gamma, \quad \beta, \quad \alpha,$ unter die Coefficienten des ersten Polynomiums, die Coefficienten des andern, aber umgekehrt, so ist:

$$a.|\nu| + b.|\nu-1| + c.|\nu-2| + \cdots + |n-2|.\gamma + |n-1|.\beta + |n|.\alpha$$

der gesuchte (n)te Coefficient des Produkts.

wo bey mir $p^m \varkappa n$; $q^m \varkappa (n-1)$; $r^m \varkappa (n-2)$; u. s. w. die nten, (n-1)ten, (n-2)ten ... Coefficienten der zugehörigen Potenzen p^m, q^m, r^m ... bedeuten. Für ganze Glieder brauche ich 7 statt $\varkappa$, so daß z. B. $r^m\,7\,(n-3)$ das (n-3)te Glied der Potenz r^m bedeutet. *Nov. Syst. Perm.* p. XXXIII, 2. H.

h) Dieser Coefficient wäre, nach meiner Zeichnung, $(\pi p) \varkappa n$, so wie $(\pi p)\,7\,n$ das nte Glied des Produkts der beyden Reihen π und p seyn würde (oben, Note g) Die Werthe solcher Lokalausdrücke für zwey und mehrere Reihen, *Nov. Syst. Perm.* p. LXXI-LXXVI; Arch. der Math. H. 2. S. 224-228. H.

Beweis. Dieß folgt unmittelbar aus der Natur der Multiplication. Denn

wenn $a + bx + cx^2 + + |n-1|.x^{n-2} + |n|.x^{n-1}$
mit $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + + |\nu-1|.x^{n-2} + |\nu|.x^{n-1}$
zu multipliciren ist, so kommt das (n)te auf x^{n-1} sich beziehende Glied (mit seinem (n)ten Coefficienten) wie folget:

$$(\alpha.|n| + \beta.|n-1| + + |\nu-1|.b + |\nu|.a)\, x^{n-1}.$$

Anmerkung. Es mögen in dem einen oder in dem andern Faktor Coefficienten seyn, die **Nullen sind**. Der allgemeine Satz ist derselbe, nur daß Theile ausfallen. Man habe

$a, b, c, d, 0, 0, 0, 0,$ in $a + bx + cx^2 + dx^3$ und
$0, 0, 0, \varepsilon, \delta, \gamma, \beta, \alpha,$ in $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4$

so ist der 8te Coefficient (oder der zu x^7 gehörige) $= d\varepsilon$, da alle andere Produkte Nullen sind.

Für den 5ten Coefficienten hat man

$$\begin{array}{ccccc} a, & b, & c, & d, & 0 \\ \varepsilon, & \delta, & \gamma, & \beta, & \alpha \\ \hline \end{array}$$
$$+ a\varepsilon + b\delta + c\gamma + d\beta + 0\alpha$$

5. **Satz 2.** **Der (n)te Coefficient in** $(a + bx + cx^2 + + |n.|x^{n-1})^2$ d. i. $T(a + + |n|)^2$ (§. 3.) **ist gleich, der zwiefachen Summe der Produkte aus den beyden äußersten Coefficienten des ursprünglichen Polynomiums, (von a bis $|n|$ sie genommen), und aus jedem Paar zweyer gleich weit von dem ersten und von dem letzten abstehenden, wenn dazu das Quadrat des mittelsten addirt wird; in den Fällen nehmlich, wo $|n|$ eine ungerade Zahl ist.** Das ist

$$T(a + + |n|)^2 = 2.a.|n| + 2.b.|n-1| + 2.c.|n-2| + + g^2,$$

wenn g der mittelste ist, zwischen a und $|n|$.

Beweis. Nach dem ersten Satz (§. 4.) wird der nte Coefficient

$$\begin{array}{l} \text{aus } a,\ b,\ c,\ \ldots g \ldots |n\text{-}1|,\ |n| \\ \text{und } |n|, |n\text{-}1|, |n\text{-}2| \ldots g \ldots\ b,\ a, \\ \hline a.|n| + b.|n\text{-}1.| + + gg + + |n\text{-}1|.b + |n|.a \\ = a.|n| + 2b.|n\text{-}1| + + gg. \end{array}$$

6. Zusatz 1. Wenn der (n)te Coefficient einerley seyn soll mit dem ersten, oder $|n| = a$, so ist $T(a)^2 = a^2$.

Zusatz 2. Auch ist

$$T(b + + |n\text{-}1|)^2 = b.|n\text{-}1| + 2c.|n\text{-}2| + +.$$

Hier aber ist $T(b + + |n\text{-}1|)^2$ der (n-2)te Coefficient in dem Quadrate $(b + cx + + |n\text{-}1|.x^{n-2})^2$. Die aus dem ursprünglichen Polynomium hier beybehaltene Ordnungszahl ist kleiner in dem verkürzten Polynomium.

Anmerkung. Man kann die Coefficienten aus $a + bx + cx^2 + +$ in ihrer Ordnung auf einen Streifen Papier schreiben, und auf einen andern Streifen eben dieselben in umgekehrter Ordnung [i]), mit so viel Nullen vorne und hinten, als man will. Um nun den (n)ten Coefficienten des Quadrats zu haben, lege man die Streifen so unter einander, daß unter dem (n)ten auf dem Einen Stück der Erste *a* auf dem andern zu liegen kömmt, so ergeben sich die Produkte von selbst, woraus der gesuchte Coefficient bestehet. Z. B. das ursprüng-

i) Dieses mechanischen Mittels, dessen Herr T. hier nur beyläufig Erwähnung thut, hat sich auch *Colson* (*Method of Flux. and infin. Ser.*) bey Multiplikation (p. 173) und Division (p. 175) zweyer Reihen, ingleichen bey Erhebung der Reihen zu Potenzen (p. 175-177) bedient. Für Produkte aus mehrern Reihen würde jenes Verfahren gleichwohl zu weitläuftig ausfallen, und da ist ihm das ungleich geschmeidigere combinatorische weit vorzuziehen. Man vergleiche die in der Note h angeführten Stellen. (*Infin. Dignit. p.* 58.)

h.

liche Polynomium sey $a + bx + cx^2 + dx^3$, die Papierstreifen, jeder mit drey Nullen, seyen, wie hier steht,

A	a,	b,	c,	d,	o,	o,	o,
B	o,	o,	o,	d,	c,	b,	a,

Man kann noch mehrere Nullen zusetzen, die aber für dieses Beispiel überflüssig sind.

Um den 7ten Coefficienten in dem Quadrate zu haben, lege man unter das 7te Fach von A das erste von B, so giebt die Multiplication blos dd.

Für den 5ten legt man unter das fünfte Fach von A, das erste von B, folgendergestalt:

a, b, c, d, o, o, o,
o, o, o, d, c, b, a,

und so ist $2bd + cc$ der 5te Coefficient im Quadrate, der zu x^4 gehört.

Die Coefficienten im Quadrate werden auch ohnedieß so leicht gefunden, daß man $T(a + + |n|)^2$ jedesmal als gegeben ansehen kann, ohne daß eine weitere Auflösung oder eine weitere Substitution nöthig ist.

7. Satz 3. Es ist

$$T(a + + |n|)^2 = 2a.|n| + T(b + + |n-1|)^2$$

d. i. jeder (n)te Coefficient des Quadrats $(a + bx + cx^2 + +)^2$ besteht aus einem Produkte $2a.|n|$ und aus dem Coefficienten des um den Theil *a* verkürzten und durch x dividirten ursprünglichen Polynomiums, nemlich $(b + cx + dx^2 + +)^2$. Der numerus termini dieses letzten Coefficienten ist so groß, als die Zahl der Coefficienten $b + c + + |n-1|$, das ist denn hier in dem

Quadrate $(b + cx + dx^2 + +)^2$ der $(n-2)$te, und war in dem unabgekürzten ursprünglichen Polynomium der $(n-1)$te.

Beweis. Nach §. 5. ist

$$T(a + + |n|)^2 = 2a.|n| + 2b.|n-1| + 2c.|n-2| + + = 2a.|n| + T(b + + |n-1|)^2.$$

Zusatz 1. Wie $T(a + + |n|)^2$ wenn $|n|$ einerley seyn soll mit a, also $T(a)^2 = a^2$; so ist auch $T(b + + |n-1|)^2 = b^2$, wenn $|n-1| = b$ ist. Also ist $T(a + b + c)^2 = 2ac + T(b + + |n-1|)^2 = 2ac + b^2$, wenn $|n| = c$ und $|n-1| = b$ ist.

Zusatz 2. Es ist überhaupt für jede Potenz, $T(a + + |n|)^m = a^m$, wenn $|n|$ selbst der erste terminus *a* seyn soll. Eben so ist $T(b + + |n-1|)^m = b^m$, wenn $|n-1| = b$.

Anmerkung. Auch ist der zweyte Coefficient in $(a + bx + cx^2 + +)^m$ oder $T(a + + |n|)^m$, der zu x^1 gehört, jedesmal $m a^{m-1} b$, wie schon aus der formula binomii klar ist. Dasselbige wird sich unten auch zeigen, als eine Folge aus der Polynomialformel.

8. **Satz 4. Der allgemeine Ausdruck für jeden (n)ten Coefficienten in dem Polynomium $(a + bx + cx^2 + +)^m$ ist folgender:** k)

k) Herr Etatsrath Tetens ist bey der (in der Vorerinnerung S. 3. versprochenen) weitern Analysis des nten Coefficienten [$\varkappa$ n] seiner *formulae polynomialis* unvermerkt auf dieselbe Lokalformel verfallen, die ich für das nte Glied [7 n] derselben (*Infin. Dign. p.* 71, 3.) bereits gefunden und (*Nov. Syst. Perm. p.* LI. *Ex.* 1. nach einer verbesserten Zeichnung) vorgetragen habe. Man vergleiche Toepf. combin. Anal. S. 160-163.

Wenn man nehmlich in der dortigen Formel (S. 160), die sich auf $1 + p$ (nicht wie hier auf $a + p$) bezieht,

anstatt	$1 + p$	7	p	n	$\mathfrak{N}$
hier setzt	$a + q$	$\varkappa$	q	n-1	$\mathfrak{M}$

$$T(a+-+|n|)^m = ma^{m-1}|n| + \frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2}T(b+-+|n-1|)^2$$
$$+\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3.}a^{m-3}.T(b+-+|n-2|)^3+-+\ldots$$
$$+\frac{m.m-1.m-2\ldots(m-|m-1|)}{1.2.3\ldots m}a^{m-m}.T(b+-+|n-(m-1)|)^m$$

und die Abmessungen der einzelnen Glieder durch a^{m-1}, a^{m-2}, a^{m-3}, ... a^{m-m} gehörig ergänzt, (weil hier a statt der dortigen 1 zu setzen), so kommt die Lokalformel für den nten Coefficienten der Potenz m von a+q, d. i.

$$(a+q)^m \varkappa n = {}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1} q^1 \varkappa(n-1) + {}^m\mathfrak{B}\, a^{m-2} q^2 \varkappa(n-2)$$
$$+ {}^m\mathfrak{C}\, a^{m-3} q^3 \varkappa(n-3) \ldots + {}^m\mathfrak{M}\, a^{m-m} q^m \varkappa 1 \ldots$$

mit der, S. 163 befindlichen, übereinstimmend, nur daß dort α, p, n+1 statt der hiesigen a, q, n; stehen. Setzt man ferner statt meiner Lokalausdrücke $q^1\varkappa(n-1)$, $q^2\varkappa(n-2)$, u. s. w. in vorstehender Formel, die gleichgültigen Tetenschen (aus Note g) und statt meiner Binomialcoefficienten ${}^m\mathfrak{A}$, ${}^m\mathfrak{B}$ .. ${}^m\mathfrak{M}$ (*Nov. Syst. Perm. p.* XL, 9.) ihre Werthe $\frac{m}{1}$, $\frac{m.m-1}{1.2}$, $\frac{m.m-1\ldots m-(m-1)}{1.2\ldots m}$, so erhält man die Formel vollkommen so, wie sie hier im Texte steht.

Um nun daraus den nten Coefficienten zu finden, macht Herr Tetens mehrere einander ähnliche Substitutionen in ihre Glieder, wie aus den Vorschriften §. 9. und den dortigen Exempeln 1, 2, 3, und dem Exempel §. 11 erhellet; ich hingegen bediene mich, statt obiger Lokalformel, der ihr gleichgültigen combinatorischen, nach dem von mir (*Nov. Syst. Perm.* p. LI) aufgestellten Relationen der lokal- und combinatorischen Zeichen, und so kommt:

$$(a+q)^m \varkappa n = {}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1} a^{n-1} A + {}^m\mathfrak{B}\, a^{m-2} b^{n-1} B$$
$$+ {}^m\mathfrak{C}\, a^{m-3} c^{n-1} C \ldots, + {}^m\mathfrak{M}\, a^0 m^{n-1} \mathfrak{M}$$

für den Zeiger $\begin{pmatrix} b & c & d & e & f & g & \ldots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \end{pmatrix}$

woraus sich jeder verlangte Coefficient mit größter Behendigkeit entwickeln läßt. *Infin. Dign.* p 102, 5. und *Tab.* V, p. 167.

Nicht also die Grundformel, sondern nur die Art sie anzuwenden, ist bey beyden Verfahren verschieden. Daß mir

Der Beweis des Satzes soll unten (§. 14, 15, 16) folgen. Die Formel gilt für alle Exponenten, für ganze positive (§. 14, 15), für gebrochene und verneinte (§. 16), so allgemein als die Binomialformel.

9. Anmerkung 1. Die Formel giebt nur den ersten Theil des gesuchten Coefficienten unmittelbar und völlig entwickelt, nehmlich das Produkt $m\,a^{m-1}|n|$. Die übrigen sind wiederum *termini generales*, nehmlich:

für den (n-2)ten Coefficienten in $(b + cx + dx^2 + +)^2$
für den (n-3)ten Coefficienten in $(b + cx + dx^2 + +)^3$
und so weiter
für den (n-m)ten Coefficienten in $(b + cx + dx^2 + +)^m$.

Anmerkung 2. Die Formel bricht ab, wenn $a^{m-m} = a^0 = 1$; und das geschieht für ganze positive Exponenten.

Aber sie bricht auch ab, wenn der numerus termini *n* ein solcher ist, daß entweder $|n|$, oder $|n-1|$ oder $|n-2|$ oder $+ |n-(m-1)|$ aus dem ursprünglichen Polynomium mit b zusammen fällt. Denn da $b + cx + dx^2 + +$ von *b* anfängt, so sind die vor b vorhergehenden Glieder Nullen. Wenn das (n-[m-1])te Glied in dem ursprünglichen Polynomium $a + bx + cx^2 + +$ das Erste, nemlich *a* seyn sollte, so ist dieß Null in dem abgekürzten Polynomium.

Hieraus folgt dann, daß jedesmal der 2te Coefficient, oder der zu x^1 gehörige, $m\,a^{m-1}.\,b$ sey. Denn hier

gleichwohl die hier im Texte angewiesene Entwickelung der Coefficienten aus der Formel schon vorher bekannt gewesen, erhellet aus den (*Nov. Syst. Perm.* p. LV, 9, 10 und Ex. 11.) von mir aufgeführten Relationen, von denen jene Entwickelung nur eine fortgesetzte mehrmal wiederholte Anwendung ist. Warum ich sie nicht gewählt habe, wird die vergleichende Zusammenstellung beyder Verfahren in der Folge zeigen.

H.

ist $|n| = b$, und $|n-1| = 0$, folglich $T(b + + |n-1|)^2 = 0$, wie alle folgende Theile in der Formel.

Anmerkung 3. Die weitere Entwickelung der unentwickelten Theile geschieht nach derselben allgemeinen Formel, durch bloße Substitutionen die auf die nemliche Art, zufolge der Formel geschehen.

Exempel 1. Es sey das vierte Glied (der Coefficient zu x^3) in der fünften Potenz von $a + bx + cx^2 + dx^3 + +$, zu finden.

So ist $m = 5$; $n = 4$; $|n| = d$; $|n-1| = c$; $|n-2| = b$; $|n-3| = a$. Oder, $T(a + + d)^5 = 5 . a^4 . d + \frac{5 . 4}{1 . 2} a^3 . T(b + c)^2 + \frac{5 . 4 . 3}{1 . 2 . 3} a^2 T . (b)^3$.

Nun ist $T(b + c)^2 = 2 . b . c$; $T(b)^3 = b^3$; folglich $T(a + + d)^5 = 5 . a^4 d + 10 . 2 . a^3 . b . c + 10 . a^2 . b^3$.

Exempel 2. Es sey $m = 5$; $n = 5$; so ist $|n| = e$; $|n-1| = d$; $|n-2| = c$. u. s. f. Und

$$T(a + + e)^5 = 5 . a^4 e + \frac{5 . 4}{1 . 2} a^3 . T(b + + d)^2 + \frac{5 . 4 . 3}{1 . 2 . 3} a^2$$

$$T(b + c)^3 + \frac{5 . 4 . 3 . 2}{1 . 2 . 3 . 4} a . T(b)^4.$$

Nun ist $T(b + + d)^2 = 2 b d + T(c)^2 = 2 b d + c^2$. Auch $T(b + c)^3 = 3 . b^2 . c$. Das übrige fällt weg.

Und $T . (b)^4 = b^4$.

Folglich $T(a + + e)^5 = 5 . a^4 . e + 10 . a^3 (2 b . d + c^2) + 10 . 3 . a^2 . b^2 . c + 5 . a . b^4$.

Exempel 3. Es sey $m = 5$; $n = 6$. Die sechs ersten Coefficienten in dem ursprünglichen Polynomium sind a, b, c, d, e, f, worunter auch Nullen seyn können. Also ist $|n| = f$; $|n-1| = e$, u. s. w.

Folglich $T(a+\ldots+|n|)^5 = 5.a^4.|n| + \frac{5.4}{1.2}a^3 T(b+\ldots+|n-1|)^2$
$+ \frac{5.4.3}{1.2.3}a^2.T(b+\ldots+|n-2|)^3 + \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}a.T(b+\ldots+|n-3|)^4$
$+ T(b+\ldots+|n-4|)^5 = 5.a^4 f + 10.a^3.(2.b.e.+2.c\,d)$
$+ 10.a^2 T(b+\ldots+d)^3 + 5.a.T(b+c)^4 + T(b.)^5.$

Ferner ist $T(b+\ldots+d)^3 = 3.b^2.d + \frac{3.2}{1.2}b.T(c.)^2$
$= 3.b^2.d + 3.b.c^2$, und $T(b+c)^4 = 4b^3.c$.
Daraus wird $T(a+\ldots+f)^5 = 5.a^4.f + 10.2.a^3.$
$(be+cd) + 10.a^2.(3b^2d+3bc^2) + 5.4.a.b^3c + b^5$.

10. Anmerkung 4. Wenn man die Formel (§.8)
$T(a+\ldots+|n|)^m = m\,a.^{m-1}|n| + \frac{m.m-1}{1.\ 2}a.^{m-2}T(|b+\ldots+n-1|)^2$
$+ \frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 3}a^{m-3}.T(b+\ldots+|n-2|)^3 + \ldots +$
$+ \frac{m.m-1.m-2\ldots m-(m-1)}{1.\ 2.\ 3.\ \ m}a^{m-m}T(b+\ldots+|n-(m-1)|)^m$
genau ansieht, so zeigt sich:

a) daß die Zahl-Coefficienten der Theile der Formel in welche der gesuchte (n)te Coefficient des Polynomiums $(a+bx+cx^2+\ldots+)^m$ zerlegt wird, die Binomial-Coefficienten sind. Die formula polynomialis ist in Hinsicht der Zahl-Coefficienten dieser Theile die formula binomialis.

b) daß alle Theile dieser Coefficienten, worinn a^{m-1} als ein Factor vorkommt, auf einmal zusammen gegeben werden. Es sind ihrer jedesmal *m*.

c) die übrigen Theile werden zwar gleich anfangs nicht einzeln sondern nur nach ihren Classen gegeben. In dem zweiten Stücke sind alle einzelne Producte begriffen, in denen a^{m-2} ein Factor ist; in dem dritten alle,

worin a^{m-3} vorkommt, u. s. f. Diese Classen sind verschieden von einander, und jede enthält Producte, die heterogen sind, in Vergleich mit denen, die zu einer andern Classe gehören. Heterogene Theile sind hier solche, die aus verschiedenen einfachen Factoren bestehen, oder aus verschiedenen Potenzen ebenderselbigen. Die Coefficienten des ursprünglichen Polynomiums nemlich werden als einfache Factoren angesehen.

d) Wird jeder Theil von neuem entwickelt, oder wird sein Werth nach der allgemeinen Formel substituirt: so erhält man wiederum die zu jeder Classe gehörigen Unter-Arten in ihrer Ordnung, und so, daß die darin begriffenen heterogenen Producte alle zusammen in Einer Summe erhalten werden [1]).

Es sind nemlich $\frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 3}$ Producte, worin a^{m-3} ein Factor ist. Zu dieser Classe gehören alle in $T(b + + |n-2|)^3$ enthaltenen Producte.

Es ist aber nach der Formel

$$T(b++|n-2|)^3 = 3b^2.|n-2| + \frac{3.2}{1.2} b.T(c++|n-3|)^2 + T(c++|n-4|)^3$$

1) Diese heterogenen Theile oder Producte erhält demnach Herr T. durch successive Substitutionen in die Glieder der Localformel (§. 8), wobey nicht selten Substitutionen in Substitutionen (wie im Exempel §. 11) vorfallen, die in Verwickelung führen, so leicht sie auch an sich sind. Diese Substitutionen vermeide ich durch meine ganz simple und leichte Entwickelung der Combinationsclassen n-1A, n-1B, n-1C...; (*Infin. Dign. p.* 75-76) deren sämtlich gut geordnete Complexionen (*Nov. Syst. Perm. p.* IX. 25) mit ihren Versetzungszahlen a, b, c... (Ebend. IX, 24 u. XL, 10) sogar aus einer Tafel (*Infin. Dign. p.* 167, oder *Nov. Syst. Perm. p.* LIX) sich ausschreiben lassen. Noch ist zu erinnern, daß diese heterogenen Theile, wie sie im Texte genannt werden, nach der Combinationsmethode genau in eben der Ordnung und Folge auf einander, wie nach dem Substitutionsverfahren, gefunden werden. H.

Also bekommt man nach ihrer Ordnung alle Theile, welche a^{m-3} mit b^2 enthalten; hernach alle, welche a^{m-3} mit b und andern Factoren enthalten, diese letzten wiederum in ihrer Ordnung, und dann solche, worin a^{m-3} mit c^3, und so ferner, sich befindet; vorausgesetzt, daß die Formel nicht schon vorher abbricht.

In dem letzten Stücke, $T(b ++ |n-(m-1)|)^m$, sind lauter Theile, worin *a* nicht mehr Factor ist. Die ersten in dieser Classe sind $m. b^{m-1}. |n-(m-1)|$. Wenn der $(n-m+1)$te Coefficient des ursprünglichen Polynomiums mit b zusammenfällt, so ist $T(b ++ |n-(m-1)|)^m = b^m$, und die Reihe bricht ab.

Wenn man auf den Theil kommt, wo *a* als Factor ausgeht, so übersieht man gleich wie die noch fehlenden Theile auf einander folgen. Die Folge ist dieselbe, nur für ein anderes ursprüngliches Polynomium, das mit b anfängt, und wobey man für den numerus termini nimmt $n-m$.

e) Man kann diese Theile der Formel außer der Ordnung entwickeln, worin sie in der Formel stehen. Man kömmt bey der Entwickelung der einen Classe niemals auf ein einzelnes Product, was in der andern Classe sich auch fände.

f) Wenn alle Substitutionen gemacht sind, so ist der Ausdruck für den gesuchten Coefficienten ganz algebraisch.

11. Anmerkung 5. Wenn der numerus termini *n* groß ist, so sind viele Substitutionen erforderlich, bis man auf die einzelnen Producte kommt. Allein, wie viele ihrer auch nöthig sind, so zeigt doch die Art des Verfahrens, daß es keine kürzere Methode gebe, die einzelnen heterogenen Theile, und also

den aus ihnen bestehenden Coefficienten zu finden, als die, welche die Formel anweiset. Denn sie erfordert nicht mehrere einfache Operationen, welche hier in Multiplicationen bestehen, als es selbst heterogene Producte giebt, deren jedes, wenn man sie nemlich abgesondert von einander haben will, seine eigne Multiplication nothwendig macht. Alle die, welche homogen sind, werden auf einmal mit ihrer ganzen Summe angegeben. Ist also hier die Arbeit weitläuftig, so liegt es an der Sache: materia longa est m).

Wenn der 12te Coefficient in der vierten Potenz von $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6 + hx^7 + ix^8 + kx^9$ gesucht wird, der auf die gewöhnliche Weise berechnet, aus 53 Theilen besteht, die aber nicht alle heterogen sind, so hat man $n = 12$, aber $|n| = 0$, $|n-1| = 0$; (weil nur zehn Glieder in dem ursprünglichen Polynomium sind) ferner $|n-2| = k$; $|n-3| = i$, u. s. f.

Nun ist:

$$T(a + + |n|)^4 = 4. a^3. |n| + \frac{4.3}{1.2} a^2. T(b + + |n-1|)^2$$

$$+ \frac{4.3.2}{1.2.3} a. T(b + + |n-2|)^3 + T(b + + |n-3|)^4$$

Aber 1) $a^3. |n| = 0.$

2) $T(b + + |n-1|)^2 = 2.b.|n-1| + 2.c|n-2| + +$

$= 0 + 2.c.k + 2.d.i. + 2.e.h + 2.f.g$

m) Sehr wahr! denn wenn ein Ganzes viele Theile hat, die alle da seyn müssen, so muß man, sie aufzufinden, wenigstens so viel Zeit dazu haben, als nöthig ist, sie zu schreiben. Ob nun aber Herrn Tetens Substitutionsmethode (wie gleich zu Anfange dieses Paragraphs behauptet wird) oder mein Combinationsverfahren (wie theils die unmittelbare Vergleichung, theils mehrere Versuche mich gelehrt haben) in der Anwendung leichter und kürzer sey, bleibt billig der eigenen Prüfung jedes einzelnen Lesers, der hierüber urtheilen will und kann, selbst überlassen. Mehr Aufschluß hierüber in meiner Abhandlung, weiter unten. H.

$$3)\ T(b++|n-2|)^3 = T(b++k) = 3.b^2 k + \frac{3.2}{1.2} b\, T(c++i)^2 + T(c++h)^3.$$

Wiederum $T(c++h)^3 = 3.c^2.h + \frac{3.2}{1.2} c.T(d++g)^2 + T(d++f)^3$

und $T(d++f)^3 = 3.d^2.f + \frac{3.2}{1.2} d e^2$

Also $T(b++|n-2|)^3 = 3.b^2 k + 3.b\,(2.c.i + 2.d.h + 2.e.g + ff) + (3.c^2.h + 3.c.(2.d.g + 2.e.f) + 3.d^2.f + 3.d.e^2$

$$4)\ T(b++|n-3|)^4 = T(b++i)^4 = 4.b^3.i + \frac{4.3}{1.2} b^2.T(c++h)^2 + \frac{4.3.2}{1.2.3} b.T(c++g)^3 + T(c++f)^4$$

Aber $T(c++g)^3 = 3.c^2.g + \frac{3.2}{1.2} c.T(d++f)^2 + T(d++e)^3\ (= 3.d^2 e)$

Und $T(c++f)^4 = 4.c^3.f + \frac{4.3}{1.2} c^2.T(d++e)^2 + \frac{4.3.2}{1.2.3} c.T(d)^3.$

Folglich, diese Substitutionen gemacht, wird

$$T(a++|n|)^4 = 4.a^3.o + \frac{4.3}{1.2} a^2.2(b.o + c.k + d.i + e.h + fg) + \frac{4.3.2}{1.2.3} a. \left\{ \begin{array}{l} 3.b(b.k + 2.c.i + 2.d.h + 2.e.g + ff) \\ + 3.c.(c.h + 2.d.g + 2.e.f) \\ + 3\,d\,(d.f + e.e) \end{array} \right.$$

$$+4b^3i+\frac{4.3}{1.2}b^2 2.(c.h+d.g+e.f)$$

$$+\frac{4.3.2}{1.2.3}b\begin{cases}3.c.(c.g+2.d.f+ee)\\+3.d.de\end{cases}$$

$$+4c^3f+\frac{4.3}{1.2}c^2.2.de$$

$$+\frac{4.3.2}{1.2.3}c.d^3$$

Hier sind nun 25 verschiedene Producte, die aber heterogen sind, und nicht weiter mit denselben Zahl-Coefficienten können verbunden werden. Ich habe auch die Theile hergesetzt, worin Nullen Factores sind, blos um die Analogie sichtbar zu machen, worin die Theile auf einander folgen.

12. Anmerkung 6. Die Menge der einzelnen heterogenen Theile in den Coefficienten hängt theils, und am meisten, von der Ordnungszahl der letztern ab, theils von dem Exponenten der Potenz, wozu der Coefficient gehören soll; dieß letztere aber nur bis dahin, daß die Potenz $m = n - 1$ ist. Denn wenn der Exponent der Potenz so groß ist, so mag er von nun an immer größer werden, die Zahl-Coefficienten der einzelnen heterogenen Theile werden dadurch verändert, aber ihre Menge, in so fern sie heterogen sind, wird nicht vergrößert.

Z. B. Ist $n = 4$, so ist der vierte Coefficient in der dritten Potenz, in $(a+bx+{+}+)^3 = 3.a^2.d$ $+3.a.T(b+{+}+c)^2+T(b)^3 = 3.a^2.d+3.2.a.b.c+b^3$
Der vierte Coefficient in der 5ten Potenz ist

$$5.a^4.d+\frac{5.4}{1.2}a^3.T(b+{+}+c)^2+\frac{5.4.3}{1.2.3}a^2.T(b)^3.$$

$$= 5.a^4.d+20.a^3.b.c+10.a^2.b^3$$

Dieß zeigt sich unmittelbar aus der Betrachtung der allgemei-

nen Formel. Denn ist der Exponent m in $T(b++|n-(m-1)|)^m$ irgendwo, so groß, daß dieser Theil so viel ist als $T(b)^m$ daß nemlich der $(n+1-m)$te Coefficient mit dem zweiten b zusammenfällt, so bricht die Reihe daselbst ab. Ein höherer Exponent m wird die Binomial-Coefficienten, und die Factores aus den Potenzen von a verändern, aber weiter nichts in Hinsicht der einzelnen Producte.

Wenn n kleiner ist als m, so bricht die Formel ab, ehe sich der Coefficient a als Factor aus den einzelnen Producten verliert.

Für $n = 2$, oder für den zweiten Coefficienten in jeder Potenz m, hat man, wie vorher erinnert ist, $m a^{m-1} b$ und für den dritten

$$m. a.^{m-1} b + \frac{m. m-1}{1. 2} a^{m-2}. b^2$$

Anmerkung 7. Wenn $n = m + 1$, so ist der letzte Theil jedesmal b^m.

Ist $n = 2m + 1$, so erhält man bey der Entwickelung des Theils $T(b++|n-m+1|)^m$ wiederum zum letzten Theil $T(c++|n-2m+2|)^m$. Dieß wird alsdenn $T(c++|3|)^m$ das ist c^m.

Anmerkung 8. Wenn $n > 2m + 1$, so ist in c^m und allen aus c^m folgenden Producten, b nicht mehr ein Factor; wie a, nach dem obigen, ausgieng als Factor in b^m und den darauf folgenden Producten.

Anmerkung 9. Die Menge der heterogenen Producte in einem Coefficienten des Quadrats ist $\frac{n}{2}$, (n für den numerus termini des Coefficienten genommen). Ist n ungerade, $2r + 1$, so muß für $\frac{1}{2}$ noch ein Product mehr, und zwar ein Quadrat gerechnet werden. Dagegen fallen einige aus, wenn unter den angenommenen n Coefficienten des ursprünglichen Polynomiums sich Nullen befinden.

Diese letzterwähnte Correction beobachtet, so giebt es in dem nten Coefficienten der 3ten Potenz $\frac{n}{1}.\frac{n+3}{2.\ 3}$ heterogene Producte. Dieß giebt für n = 2 nur $\frac{5}{6}$. Aber dieser Bruch ist hier ebenfalls für ein Ganzes anzusehen.

Wenn der (n)te Coefficient der (m)ten Potenz zergliedert wird, so sind in demselben $\frac{n}{m}$ Coefficienten, die zu Potenzen gehören, deren Exponent m—1 ist, und die weiter entwickelt werden müssen. Sie gehören zwar nicht zu der (m-1)ten Potenz des ursprünglichen Polynomiums selbst, sondern zu den Potenzen abgekürzter Polynomien, die aus jenem ihre Coefficienten haben, aber weniger davon enthalten. Und dann giebt es in denselben (n)ten Coefficienten der (m)ten Potenz $\frac{n\ (n+m)}{2\ (m-1)\ m}$ Coefficienten, die zu den (m-2)ten Potenzen gehören.

Wie viel darinnen sind aus noch niedrigern Potenzen, und so herunter bis auf die einzelnen heterogenen Producte, im allgemeinen zu bestimmen, das hieße so viel, als die Zahl der Substitutionen zu bestimmen, die zur gänzlichen Entwickelung erfordert werden. Der allgemeine Ausdruck für jene Anzahl würde sehr zusammengesetzt und verwickelt seyn. n)

Für die aus der (m-3)ten Potenz ist sie nicht völlig $\frac{1}{2.3}\left(\frac{n.\ (n+m-1)\ (n+m)}{m-2.\ m-1.\ m}\right)$. Es wird vorausgesetzt, daß n größer sey als m.

n) Es läßt sich gleichwohl eine Formel dafür angeben, ohne eben zu sehr verwickelt zu seyn. Die Schwierigkeit der Sache im Allgemeinen zu übersehen, will ich hier nur auf das verweisen, was ich davon (Arch. der Math. H. 4. S. 412, 413) beygebracht habe. H.

13. Zusatz 1. Die allgemeine Formel (§. 8) gilt auch, wenn das ursprüngliche Polynomium unter den n angenommenen Coefficienten einige hat, die Nullen sind, zwischen andern, die es nicht sind. Die Abkürzungen, welche bey den Substitutionen daraus entstehen, ergeben sich von selbst.

Es sey das Polynomium $a + bx + ex^4$, so kann man dafür setzen $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$, wo dann $c = o$, $d = o$ ist. Soll nun in der 4ten Potenz der 5te Coefficient gesucht werden, der zu x^4 gehört, so ist $m = 4$, $n = 5$, und man erhält zufolge der allgemeinen Formel

$$T(a + + e)^4 = 4 . a^3 . e + \frac{4 . 3}{1 . 2} a^2 . T(b + + d)^2$$

$$+ \frac{4 . 3 . 2}{1 . 2 . 3} a T(b + + c)^3 + T(b + + b)^4$$

Das erste Stück ist $4 . a^3 e$, das zweite enthält $T(b + + d)^2 = 2 . b . d + c^2$, und ist $= o$; das dritte $T(b + + c)^3 = 3 b^2 c = o$; das vierte ist b^4; bleiben also das erste und letzte nur allein übrig.

Zusatz 2. Das ursprüngliche Polynomium sey

$$\alpha + \beta x^r + \gamma x^s + \delta x^t + +$$

Nun sucht man die arithmetische Reihe, worin die Exponenten der Potenzen von x, nemlich r, s, t vorkommen, wie durch bekannte Methoden möglich ist, wenn die Exponenten rationelle Zahlen sind; und in dieser arithmetischen Reihe sey die Differenz d. Alsdann kann statt des gegebenen Polynomiums ein anderes gebraucht werden, von der Form:

$$a + bx^d + cx^{2d} + + \beta x^r + + \gamma x^s + + \delta x^t + + \text{ o)}.$$

o) Ich lege daher gleich anfangs nicht die einfachste Reihe $a + bx + cx^2 ...$ (wie hier §. 2. 3.) sondern die am allgemeinsten ausgedrückte $a x^\mu + b x^{\mu + \delta} + c x^{\mu + 2\delta} ...$, für jede Werthe von μ und δ, zum Grunde. Von den Vortheilen einer solchen An-

Man hat alsdann für die Coefficienten von x^r, von x^s, und von x^t u. s. f. ihre Ordnungszahlen in dieser Reihe. Die übrigen Coefficienten sind lauter Nullen.

Eben so hat man die Ordnungszahlen für die Coefficienten in $(a + bx^d + ex^{2d} + + \beta x^r + + \gamma x^s + + \delta x^t + +)^m$ und weiß also, der wievielte in diesem letzten Polynomium der sey, den man in $(\alpha + \beta x^r + \gamma x^s + \delta x^t + +)^m$ finden soll.

Z. B. das ursprüngliche Polynomium sey
$\alpha + \beta x^{3/2} + \gamma x^2 + \delta x^{9/4}$. Es wird gesucht der Coefficient zu x^3 in der vierten Potenz.

Man macht
$\alpha + bx^{1/4} + cx^{2/4} + dx^{3/4} + ex + fx^{5/4} + \beta x^{3/2} + g x^{7/4} + \gamma x^2 + \delta x^{9/4} + l x^{10/4} + m x^{11/4} + + |n| x^3$,
wo alle Coefficienten außer $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, Nullen sind.

Es ist also $m = 4$, $n = 13$; $|n| = 0$; $|n-1| = m = 0$, u. s. w.

Folglich $T(a + + |n|)^4 = 4a^3|n| + \frac{4\cdot3}{1\cdot2} a^2 T(b + + |n-1|)^2$

$+ \frac{4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3} a T(b + + |n-2|)^3 + T(b + + |n-3|)^4$

der letzte Theil $T(b + + |n-3|)^4$ weiter entwickelt giebt lauter Theile, in denen b ein Factor ist, die also alle aus-

nahme, Toepf. comb. Anal. Vorr. S. XI—XIII und S. 162, 189. Auch ist mein Combinationsverfahren in solchen Fällen, wo Nullen (wie hier im Exempel des Textes) unter den Coefficienten der gegebenen Reihe vorkommen, d. i. wo die Zahlen im Zeiger nicht nach der Ordnung sondern sprungsweise fortgehen, sehr kurz und bequem. So übersieht man z. B. für das hier im Texte ausgeführte Exempel sogleich, daß nur das einzige Glied $\frac{4\cdot3}{1\cdot2}\alpha^2\beta^2 x^3$ kommen könne, weil die Zahl 12, aus den Zahlen 6, 8, 9, die sich hier auf β, γ, δ beziehen, (denn auf diesen vier Zahlen beruht einzig die Entscheidung, was für ein Coefficient zu $x^{12/4}$ oder x^3 zu setzen sey) sich nur allein aus $6 + 6$ zusammensetzen läßt. H.

fallen, außer der letzte $T(c + + |n-6|)^4$ und dieser entwickelt, enthält lauter Theile, die c zum Factor haben, also auch ausfallen. Der letzte ist $T(d + + |n-9|)^4 = d^4$, der auch Null ist.

Durch die Substitution für $T(b + + |n-2|)^3$ bekommt man wiederum lauter Theile die Nullen sind, und der letzte $T(c + + |n-4|)^3$ entwickelt, giebt lauter Theile, in denen c ein Factor ist, die also auch Nullen sind, so wie der letzte $T(d + + |n-6|)^3$, der gleichfalls zu lauter Nullen führt. Das letzte Stück in demselben ist $T(e + + |n-8|)^3 = e^3 = 0$.

Weil $4 . a^3 . |n|$ auch $= 0$ ist, so bleibt nur übrig $\frac{4.3}{1.2} a^2 . T(b + + |n-1|)^2 = \frac{4.3}{1.2} a^2 (2bm + 2cl + 2dd + 2e\gamma + 2fg + \beta^2) = \frac{4.3}{1.2} a^2 . \beta^2$. Alles andere ist Null.

14. Beweis für die allgemeine Formel

I.) Für die zweite Potenz ist, zufolge des zweiten Satzes §. 5 und des Zusatzes 2 §. 6.

$$T(a + + |n|)^2 = 2 a |n| + T(b + + |n-1|)^2.$$
$$T(a + + |n-1|)^2 = 2 a . |n-1| + T(b + + |n-2|)^2.$$

II.) Die Formel ist auch richtig für die dritte Potenz.

Es ist nemlich

$$T(a + + |n|)^3 = 3 . a^2 . |n| + \frac{3.2}{1.2} a . T(b + + |n-1|)^2 + T(b + + |n-2|)^3.$$

Dies zeigt sich durch Folgendes:

1) Es sey $(a + bx + cx^2 + +)^2 = A + Bx + Cx^2 + + |N-II| x^{n-2} + |N-I| x^{n-1} + |N| x^n$

das ist, der (n)te Coefficient im Quadrat werde bezeichnet durch $|N|$, der (n-1)te durch $|N\text{-}I|$, der (n-2)te durch $|N - II|$ u. s. f. p)

2) Zufolge §. 6 ist also

$$|N| = T(a + + |n|)^2 = 2\,a.|n| + T(b + + |n\text{-}1|)^2$$
$$|N\text{-}I| = T(a + + |n\text{-}1|)^2 = 2\,a.|n\text{-}1| + T(b + + |n\text{-}2|)^2$$
$$|N\text{-}II| = T(a + + |n\text{-}2|)^2 = 2.a.|n\text{-}2| + T(b + + |n\text{-}3|)^2$$

u. s. f.

$$C = T(a + + |n\text{-}n + 3|)^2 = T(a + + c)^2 = 2\,a\,c + T(b + + b)^2 = 2.a\,c + b^2.$$
$$B = T(a + + |n\text{-}n + 2|)^2 = T(a + + b)^2 = 2\,a\,b.$$
$$A = T(a + + |n\text{-}n + 1|)^2 = T(a + + a)^2 = a^2.$$

3) Nach Satz 1. §. 4. ist der nte Coefficient der zu x^{n-1} gehört in $(a + bx + cx^2 + +)^3$, oder in $(A + Bx + Cx^2 + +)(a + bx + cx^2 + +)$, das ist, $T(a + + |n|)^3$

$$= a.|N| + b.|N\text{-}I| + c.|N\text{-}II| + + |n\text{-}2|\,C + |n\text{-}1|\,B + |n|\,A.$$
$$= a\,T(a + + |n|)^2 = 2\,a^2\,|n| + a\,T(b + + |n\text{-}1|)^2$$
$$+ b\,T(a + + |n\text{-}1|)^2 = 2.a.|n\text{-}1|\,b + b.T(b + + |n\text{-}2|)^2$$
$$+ c\,T(a + + |n\text{-}2|)^2 = 2.a.|n\text{-}2|\,c + c\,T(b + + |n\text{-}3|)^2$$
$$+ + + |n\text{-}2|\,C = |n\text{-}2|\,T(a + + c)^2 = |n\text{-}2|\,2\,a.c. + |n\text{-}2|\,T(b + + b)^2$$

p) An der Stelle der römischen Zahlen I, II, III, neben N, oder anstatt $|N|$, $|N\text{-}I|$, $|N\text{-}II|$, $|N\text{-}III|$ u. s. w.:

setze ich $\mathcal{N}$, $\overset{-1}{\mathcal{N}}$, $\overset{-2}{\mathcal{N}}$, $\overset{-3}{\mathcal{N}}$ u. s. w.

Nehmlich, die nten, $(n \pm 1)$ten, $(n \pm 2)$ten . . . $(n \pm m)$ten Coefficienten (Glieder, Classen, Werthe ꝛc.) anzuzeigen, bediene ich mich der Zahlen $0, \pm 1, \pm 2 \ldots \pm m$, die ich, als Distanzexponenten über die Zeichen dieser Dinge setze. Von den Vortheilen solcher Exponenten, mit denen man, wie mit andern Exponenten, rechnen kann, mein *Nov. Syst. Perm.* p. XXXVII-XXXIX, LXV, LXVI; Toepf. comb. Anal. S. 164-166. Meine Distanzexponenten verwandeln nehmlich willkührliche Bezeichnungen, wie hier und da vorkommen, in wissenschaftliche. Arch. der Math. H. 1. S. 94. S. 99. Anm. H.

$+ |n-1| B = |n-1| T(a + + b)^2 = |n-1| 2.ab.$
$+ |n| A = |n| a^2.$

Diese Theile zusammen genommen geben

$$T(a + + |n|)^3 = 2a^2.|n| + 2a(|n-1|b + |n-2|c + + + c.|n-2| + b.|n-1| + a^2.|n| + aT(b + + |n-1|)^2 + bT(b + + |n-2|)^2 + cT(b + + |n-3|)^2 + + |n-2|\, T(b + + b)^2$$

4) Aber $2.a^2.|n| + a^2|n| = 3a^2.|n|$. Ferner $2a.(|n-1|b + |n-2|c + + c.|n-2| + b.|n-1|) = 2aT(b + + |n-1|)^2$ Denn es ist $T(b + + |n-1|)^2$ der Coefficient in $(b + cx + dx^2 + +)^2$ dessen numerus ordinis so groß ist, als die Zahl der Coefficienten $(b + + |n-1|)$ aus dem abgekürzten und dividirten ursprünglichen Polynomium, das ist $n-2$ nach §. 5.

5) Die übrigen Theile (in 3.) nemlich $bT(b + + |n-2|)^2 + cT(b + + |n-3|)^2 + + |n-2|\, T(b + + b)^2$, sind Producte die herauskommen, wenn man die Coefficienten in $(b + cx + dx^2 + + |n-2|\, x^{n-3})^2$ mit denen in $(b + cx + dx^2 + + |n-2|\, x^{n-3})$ in umgekehrter Ordnung genommen, einzeln mit einzeln multiplicirt. Diese geben also den Coefficienten in $(b + cx + dx^2 + + |n-2|\, x^{n-3})^3$, oder $T(b + + |n-2|)^3$

6) Demnach

$$T(a + + |n|)^3 = 3.a^2.|n| + 3.a.T(b + + |n-1|)^2 + T(b + + |n-2|)^3$$

Das ist: die Formel

$$T(a + + |n|)^m = m.a^{m-1}|n| + \frac{m.m-1}{1.2} a^{m-2}.T(b + + |n-1|)^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} a^{m-3}.T(b + + |n-2|)^3 + + + T(b + + |n-m+1|)^m$$

ist richtig, wenn $m = 2$, und wenn $m = 3$ ist.

15. III. Wenn die Formel richtig ist für die mte Potenz, so ist sie's auch für die nächst höhere $(m+1)$te.

1) Wenn folgende Coefficienten der mten Potenz
$T(b++|n-2|)^m$, $T(b++|n-3|)^m \ldots T(b++c)^m$, $T(b++b)^m$
mit b, c, $|n-3|$ $|n-2|$
jeder oben stehende mit dem darunter stehenden multiplicirt wird, so ist die Summe der Producte, $bT(b++|n-2|)^m + c.T(b++|n-3|)^m ++ |n-3| T(b++c)^m + |n-2| b^m = T(b++|n-2|)^{m+1}$, nach §. 4. Die Glieder dieser Summe nemlich sind die Coefficienten in $(b+cx+dx^2++)^m$ in umgekehrter Ordnung genommen, mit den darunter gesetzten in $b+cx+dx^2++$ bis auf $n-2$ (diesen eingeschlossen) multiplicirt.

2) Wenn auf ähnliche Art die Coefficienten
$T(b++|n-1|)^m$, $T(b++|n-2|)^m ++ T(b+b)^m$
mit a, b, $|n-2|$
jeder obenstehende mit dem darunter gesetzten multiplicirt wird, so ist die Summe solcher Producte
$= aT(b++|n-1|)^m + T(b++|n-2|)^{m+1}$

Die Zahl der Coefficienten in $(b++|n-1|)^m$ ist $n-2$. Nun diese mit denen aus dem ursprünglichen Polynomium $(a+bx++|n-2|)$ verbunden, so kommt $|n-2|$ als der letzte von diesen unter dem ersten von jenen zu stehen.

3) In der allgemeinen Formel geht der erste Theil für $T(a++|n|)^m$, nemlich $ma^{m-1}|n|$ nach §. 6. Zusatz 2. allemal über in a^m, wenn $|n|$ mit a zusammenfällt. Alsdenn fallen die übrigen Theile von selbst weg.

4) Dieser erste Theil $ma^{m-1}|n|$ im Coefficienten $T(a++|n|)^m$ wird für die vorhergehenden Coefficienten $ma^{m-1}|n-1|$; $ma^{m-1}|n-2|$ u. s. f.

Wenn diese Coefficiententheile

$$m\,a^{m-1}|n|;\; m\,a^{m-1}|n-1|;\; m\,a^{m-1}b;\; a^{m-1}a$$

mit a, b . . $|n-1|$. $|n|$

wie vorher, jeder obenstehende mit dem darunter stehenden, multiplicirt werden, so ist die Summe der Producte $= (m+1)a^m|n| + m.a^{m-1}.\,T(b++|n-1|)^2$ denn $|n-1|b + |n-2|c + + c.|n-2| + b.|n-1| = T(b++|n-1|)^2$

5) Es sey also für die mte Potenz

$$T(a++|n|)^m = m.a^{m-1}|n| + \frac{m.m-1}{1.\ 2}a^{m-2}T(b++|n-1|)^2 ++$$
$$+ P.a^{m-h}.T(b++|n-(h-1)|)^h + Q.a^{m-h-1}T(b++|n-h|)^{h+1}$$
$$+ + T(b++|n-(m-1)|)^m$$

wo P und Q ein paar nächst auf einander folgende Binomial-Coefficienten der (m)ten Potenz sind.

Nun giebt

$a\,T(a++|n|)^m + b\,T(a++|n-1|)^m + + |n-1|\,T(a+b)^m + |n|a^m$ den Coefficienten $T(a++|n-1|)^{m+1}$.

6) Man kann also die Theile, woraus der Coefficient $T(a++|n|)^m$ besteht, erst jeden für sich, so verändern, wie solche in den vorhergehenden Coefficienten von dem (n)ten, nemlich in dem $(n-1)$ten; den $(n-2)$ten u. s. f. bis auf den ersten zurück, enthalten sind, und dann in ihrer Ordnung mit $a, b, c,$ . . . diese so veränderte einzelne Theile in umgekehrter Folge multiplicieren. Wenn dieß mit allen Theilen in $T(a++|n|)^m$ nach und nach geschieht, so bekömmt man $T(a++|n|)^{m+1}$.

7) Der erste Theil in $T(a++|n|)^m$ ist $m\,a^{m-1}|n|$. So giebt $m\,a^{m-1}|n|$, $m.a^{m-1}|n-1|$ . . . $m\,a^{m-1}b$, a^m

mit a, b, . . . $|n-1|$, $|n|$

wie vorher $(m+1)a^m|n| + m.a^{m-1}\,T(b++|n-1|)^2$ (nach 4.)

Der folgende Theil in $T(a + + |n|)^m$ ist

$\frac{m.m-1}{1.\ 2} a.^{m-2} T(b + + |n-1|)^2$

Aber $T(b + + |n-1|)^2$, $T(b + + |n-2|)^2$, .. $T(b + + b)^2$
mit a, b, $|n-2|$
multiplicirt, giebt $a\,T(b + + |n-1|)^2 + T(b + + |n-2|)^3$, nach der vorhergehenden (n. 2.)

Demnach wird aus dem ersten Theile und aus dem zweyten zusammen

$$(m + 1)a^m |n| + (m + \frac{m.m-1}{1.\ 2}) a^{m-1}\ T(b + + |n-1|)^2 +$$
$$\frac{m.|m-1|}{1.\ 2}\ T(b + + |n-2|)^3.$$

Das ist, wenn m die nächsthöhere Potenz ist, oder für m+1 gesetzt wird m,

$$m.a^{m-1} |n| + \frac{m.m-1}{1.\ 2}\ a^{m-2}\ T(b + + |n-1|)^2$$
$$+ \frac{m.m-1}{1.\ 2}\ T(b + + |n-2|)^3.$$

8) Ueberhaupt nehme man den Theil des Coefficienten $P a^{m-h}.\ T(b + + |n-(h-1)|)^h$ (nach n. 5.), so wie solcher in allen vorhergehenden Coefficienten enthalten ist, und multiplicire dann auf dieselbe Art wie vorhin

$P.T(b + + |n-(h-1)|)^h$; $P.T(b + + |n-h|)^h$; ... $P.T(b + + b)^h$
mit a, b, ... $|n-h|$
so bekömmt man nach (n. 2.)

$$P.a\,T(b + + |n-(h-1)|)^h + P.T(b + + |n-h|)^{h+1}$$

Und $Q.T(b + + |n-h|)^{h+1}$ geht über in
$Q.a.T(b + + |n-h|)^{h+1} + Q.T(b + + |n-h-1|)^{h+2}$

Folglich erhält man für $P.a^{m-h}T(b+\!\!+|n-(h-1)|)^h$ diese beyden Stücke

$$P.a^{m-h+1}.\ T(b+\!\!+|n-(h-1)|)^h$$
$$+\ P.\ a^{m-h}\ T(b+\!\!+|n-(h-1)|)^{h+1}$$

und gleichfalls wird aus $Qa^{m-h-1}.\ T(b+\!\!+|n-h|)^{h+1}$ für die nächst höhere (m+1)te Potenz

$$Qa^{m-h}.\ T(b+\!\!+|n-h|)^{h+1}$$
$$+\ Qa^{m-h-1}.\ T(b+\!\!+|n-h-1|)^{h+2}$$

das ist im Allgemeinen: Wenn der (n)te Coefficient der (m)ten Potenz in den (n)ten der nächst höhern Potenz übergeht, so kommt anstatt eines jeden Theils in der Formel für die (m)te Potenz, nemlich anstatt $Q.a^{m-h-1}\ T(b+\!\!+|n-h|)^{h+1}$ ein andrer, nehmlich $(P+Q)a^{m-h}\ T(b+\!\!+|n-h|)^{h+1}$

Dieser letztere Theil ist der vorige multiplicirt, mit *a* und einem Zahlen-Coefficienten, der die Summe ist von zweyen nächst auf einander folgenden Binomial-Coefficienten, und zwar von demjenigen, den dieser Theil selbst in der (m)ten Potenz schon hat, Q, und dem, der zu dem nächstvorhergehenden gehört.

Nun ist, nach den bekannten Gesetzen der Binomial-Coefficienten, P+Q der Coeffitient desselben Theils in der (m+1)ten Potenz, der in der (m)ten Potenz Q hat, und dessen nächst vorhergehender P ist.

Folglich gilt die Formel, welche für die (m)te Potenz richtig ist, auch für die (m+1)te. Denn wenn statt *m* gesetzt wird m+1, so wird jeder Theil mit *a* multiplicirt, und jedes Theils Zahlen-Coefficient wird zu einem Binomial-Coefficienten der (m+1)ten Potenz für denselben Theil umgeändert.

16. **Satz 5.** Die obige Polynomial-Formel ist von eben so allgemeinem Umfange als die Binomial-Formel, und gilt auch für gebrochene und negative Exponenten der Potenzen.

Beweis.

Dies zeiget sich aus einem andern Beweise, den man für die Richtigkeit der Formel führen kann.

1) Es sey $a + bx + cx^2 + + |n-2| x^{n-3} + |n-1| x^{n-2} + |n| . x^{n-1} = a + y$, oder

$$y = bx + cx^2 + + |n-2| . x^{n-3} + |n-1| x^{n-2} + |n| . x^{n-1} + + = x(b + cx + + |n-2| . x^{n-4} + |n-1| . x^{n-3} + + |n| . x^{n-2} + +)$$

$$y^2 = x^2 (b + cx + + |n-2| . x^{n-4} + |n-1| . x^{n-3} + +)^2$$

$$y^3 = x^3 (b + cx + + |n-2| . x^{n-4} + +)^3$$

$$y^m = x^m (b + cx + + |n-(m-1)| x^{n-m-1} + +)^m$$

2) Es ist auch

$$(a + bx + cx^2 + +)^m = a^m + m . a^{m-1} y + \frac{m . m-1}{1 . 2} . a^{m-2} y^2 + \frac{m . m-1 . m-2}{1 . 2 . 3} a^{m-3} y^3 + +$$

Dieß letzte nach der Binomial-Formel, und auch für negative und gebrochene *m*.

3) Und in jedem Fall, wo die letzte Gleichung in (n. 2.) gilt, ist der (n)te Coefficient, das ist, der Coefficient zu x^{n-1} in $(a + y)^m$, oder in $(a + bx + cx^2 + +)^m$ die Summe aller Coefficienten zu x^{n-1}, die in $m a^{m-1} y$, in $\frac{m . m-1}{1 . 2} a^{m-2} y^2$ u. s. f. enthalten sind, d. i. in jeder Potenz von y, wie y^h, multiplicirt mit dem dazu gehörigen Binomial-Coefficienten, und mit a^{m-h}.

4) Nun ist der Coefficient zu x^{n-1}

in $m.\,a.^{m-1}\,y$; $m.\,a^{m-1}\,|n|$,

in $\frac{m.\,m-1}{1.\;2}\,a.^{m-2}y^2$ ist solcher $\frac{m.\,m-1}{1.\;2}\,a^{m-2}\,T(b++\,|n-1|)^2$

in $\frac{m.\,m-1.\,m-2}{1.\;2.\;3}\,a^{m-3}y^3$ ist er $\frac{m.\,m-1.\,m-2}{1.\;2.\;3}\,a^{m3}\,T(b++\,|n-2|)^3$

Und so ferner in

$\frac{m.\,m-1.\,m-2\ldots1.}{1.\;2.\;3.\ldots m}\,a^{m-m}\,y$, ist er auch $T(b++\,|n-(m-1)|)^m$

5) Folglich der Coefficient zu x^{n-1} in $(a+y)^m$, d. i. in $(a+bx+cx^2++)^m$, oder $T(a++\,|n|)^m = m.\,a^{m-1}\,|n|$ $+\frac{m.\,m-1}{1.\;2}\,a.^{m-2}\,T(b++\,|n-1|)^2 ++ T(b+\,|n-(n-1)|)^m$

17. Satz 6. Es sey $P = a+bx+cx^2++\,|n-2|.x^{n-3}$ $+\,|n-1|.x^{n-2}+\,|n|.x^{n-1}++$

und. $Q = \alpha+\beta x+\gamma x^2++\,|\nu-2|\,x^{n-3}+|\nu-1|.\,x^{n-2}$ $+\,|\nu|.\,x^{n-1}++$

(Hier ist *n* als die Ordnungszahl des (n)ten Coefficienten $|n|$, einerley mit ν, aber die Coefficienten $|n|$ und $|\nu|$ selbst sind verschieden.)

Der (n)te Coefficient in $P.^m\,Q^h$ werde bezeichnet mit $T(a++\,|n|)^m.(\alpha++\,|\nu|)^h$, und auf eine ähnliche Art sey $T(b++\,|n-1|)^m$. $(\alpha++\,|\nu-1|)^h$ der (n-2)te Coefficient in dem Produkte

$$(b+cx+dx^2++)^m\,(\beta+\gamma x+\delta x^2++)^h;$$

so ist die allgemeine Formel für die Coefficienten in dem Produkte $P^m.\,Q^h$ folgende:

$$T(a{+}{+}|n|)^m(\alpha{+}{+}|\nu|)^h = m.a^{m-1}\alpha.^h|n| + \frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2}.\alpha^h.$$

$$T(b{+}{+}|n-1|)^2 + h.a.^m\alpha^{h-1}|\nu| + \frac{h.h-1}{1.2}a^m\alpha^{h-2}.$$

$$T(\beta{+}{+}|\nu-1|)^2 + \frac{m.h}{1.1}a^{m-1}\alpha^{h-1}T(b{+}{+}|n|)(\beta{+}{+}|\nu|)$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}a^{m-3}\alpha^h.T(b{+}{+}|n-2|)^3$$

$$+ \frac{h.h-1.h-2}{1.2.3}a^m.\alpha^{h-3}T(\beta{+}{+}|\nu-2|)^3$$

$$+ \frac{m.m-1.h}{1.2.1}a^{m-2}.\alpha^{h-1}T(b{+}{+}|n-2|)^2(\beta{+}{+}|\nu-2|)$$

$$+ \frac{m.h.h-1}{1.1.2}a^{m-1}.\alpha^{h-2}T(b{+}{+}|n-2|)(\beta{+}{+}|\nu-2|)^2$$

$$+ + +$$ q)

q) Der allgemein hier ausgedruckte Coefficient $T(a{+}{+}|n|)^m(\alpha{+}{+}|\nu|)^h$ der Formel im Texte, ist mein $(P^m Q^h) \varkappa n$ (oben Note g, h). Eine andere (combinatorische, in meinen Lokalzeichen ausgedrückte) Analysis dieses Coefficienten, hat Hr. M. Rothe (Arch. der Math. H. 2. S. 220-223) gegeben. Die combinatorische Anordnung gewährt, außer der Leichtigkeit, mit welcher nach ihr die Glieder sich entwickeln lassen, auch noch den Vortheil, daß sie die deutlichsten Vorschriften giebt, welche Stücke der Formel zusammengehören, und wie sie als Theile eines Ganzen auf einander folgen. (Von diesem wichtigen Nutzen der local- und combinatorischen Formeln, Toepf. comb. Anal. S. 125, 126, 160; meine *Paral. ad Serier Reuers. p. XXIII.*) Wie nöthig das sey, wird man schon an der Formel im Texte gewahr, wo doch nur das Produkt zweyer Potenzen P^m und Q^h vorkommt. Welche Verwickelung würde nicht bey dem Produkte mehrerer Potenzen entstehen! Eine allgemeine Auflösung für jede gegebene Anzahl von Potenzen der Reihen enthält mein allgemeines Produktenproblem (Arch. der Mathem. H. 2. S. 224-228), wo die so außerordentliche Mannichfaltigkeit der vorkommenden einzelnen Potenzglieder und Coefficienten, wie und mit welcher Auswahl zusammengenommen sie die einzelnen Theile des gesuchten Coefficienten, oder Gliedes des Produkts, bestimmen, in einer leichten combinatorischen Formel zusammengefaßt ist. Statt solcher Formeln werden hier die im nachstehenden Be-

Beweis.

1) Man setze $P = (a + bx + cx^2 + +) = a + y$
$Q = (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + +) = \alpha + z$; so ist

$$P^m = a^m + m.a^{m-1}y + \frac{m.m-1}{1.\ 2}a^{m-2}.y^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 3}a^{m-3}y^3 + +$$

$$Q^h = \alpha^h + h.\alpha^{h-1}z + \frac{h.h-1}{1.2}\alpha^{h-2}z^2 + \frac{h.h-1.h-2}{1.\ 2.\ 3}.\alpha^{h-3}z^3 + +$$

und

$$\begin{aligned} P^mQ^h = {} & a^m\alpha^h + m a^{m-1}\alpha^h y + \frac{m.m-1}{1.\ 2}a^{m-2}\alpha^h y^2 \\ & + h.a^m\alpha^{h-1}z + \frac{h.h-1}{1.\ 2}a^m\alpha^{h-2}z^2 \\ & + \frac{m.h}{1.\ 1}a^{m-1}\alpha^{h-1}yz \\ & + \frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 3}a^{m-3}\alpha^h y^3 \\ & + \frac{h.h-1.h-2}{1.\ 2.\ 3}a^m\alpha^{h-3}.z^3 \\ & + \frac{m.m-1.h}{1.\ 2.\ 1}a^{m-2}\alpha^{h-1}y^2z \\ & + \frac{m.h.h-1}{1.\ 1.\ 2}a^{m-1}\alpha^{h-2}yz^2 \end{aligned}$$

Hier ist das Gesetz des Fortgangs klar aus der Binomial-Formel, wenn man das ganze Produkt $P^m.Q^h$ nach den Potenzen von a und α und von y und z in Theile zerlegt, so, daß als zu Einem und demselben Theil gehörig angesehen wird, alles, worinn die Summe des Exponenten von a und α, und von y und z, dieselbe ist. Die

weise, so wie im §. 18, vorkommenden wörtlichen Nachweisungen gebraucht, die aber die Bequemlichkeit einer so einfachen Formel bey weitem nicht erreichen, noch auch erreichen können. H.

Faktores $a^{m-1} . \alpha^{h}$; $a^{m} . \alpha^{h-1}$; und $a^{m-2} \alpha^{h}$; $a^{m-1} . \alpha^{h-1}$; $a^{m} . \alpha^{h-2}$; u. s. f. charakterisiren also die Theile.

Die Exponenten Summe für die Potenzen von a und α nimmt mit jedem folgenden Theile ab, da hingegen die Exponenten-Summe für die Potenzen von y und z zunimmt. Beyde Summen zusammen sind überall $m + h$. Ist also die Exponenten-Summe von a, und α, irgendwo $m + h - n$, so ist die Exponenten-Summe von x und y, ebendaselbst n.

2. Der (n)te Coefficient, oder der zu x^{n-1} in $P^{m} Q^{h}$ (den ersten zu x^{0} aus der Acht gelassen, der für sich $a^{m} \alpha^{h}$ ist,) wird also erhalten, wenn die Coefficienten zu x^{n-1} in y, z; y^{2}, z^{2}; y^{3}; $y^{2} z$, $y z^{2}$, z^{3} und so ferner, zusammen genommen werden, jeder in den dazu gehörenden Faktor multiplicirt. Diese Faktoren sind die dazu gehörenden Potenzen von a und α, und die Produkte der zu diesen letzteren wiederum gehörenden Binomial-Coefficienten.

3) Da also der zu x^{n-1} gehörige Coefficient in $y = bx + cx^{2} + dx^{3} + + |n| x^{n-1}$ ist $|n|$, und der zu x^{n-1} gehörige in $z = \beta x + \gamma x^{2} + + |\nu| x^{n-1}$ ist $|\nu|$, so erhält man für den ersten Theil des gesuchten Coefficienten, $m . a^{m-1} . \alpha^{h} |n| + h . a^{m} \alpha^{h-1} |\nu|$.

4) In $y^{2} = (bx + cx^{2} + + |n-2| x^{n-3} + |n-1| . x^{n-2} + |n| . x^{n-1})^{2} = x^{2} (b + cx + + |n-2| x^{n-4} + |n-1| x^{n-3} + +)^{2}$ ist der Coefficient zu x^{n-1}, $T(b + + |n-1|)^{2}$

Und in $z^{2} = x^{2} (\beta + \gamma x + + |\nu-2| . x^{n-4} + + |\nu-1| x^{n-3} + +)^{2}$ ist selbiger $T(\beta + + |\nu-1|)^{2}$

Und in

$yz = x^{2} (b + cx + + |n-2| . x^{n-4} + |n-1| x^{n-3} + +) (\beta + \gamma x + + |\nu-1| x^{n-3})$ ist selbiger $T(b + + |n-1|) (\beta + + |\nu-1|)$

5) Auf eine ähnliche Art ist der zu x^{n-1} gehörige Coefficient in y^{3}, $T(b + + |n-2|)^{3}$; in z^{3}, $T(\beta + + |\nu-2|)^{3}$

in $y^2 z$, $T(b++|n-2|)^2 . (\beta++|\nu-2|)$
in $y z^2$, $T(b++|n-2|) (\beta++|\nu-2|)^2$ u. s. f.

6) Multiplicirt man nun jeden dieser Coefficienten mit den in $P^m . Q^h$ vorkommenden Faktoren, so erhält man den Ausdruck für $T(a++|n|)^m . (\alpha++|\nu|)^h$.

18. Anmerkung. 1. Das Gesetz des Fortgangs zeigt, wie die folgenden Theile leicht gefunden werden.

1. Man charakterisire die verschiedenen Theile durch die Exponenten-Summe von a und α, so wie bey der obigen Formel für $T(a++|n|)^m$ man die weitern Stücke durch die Potenz von a allein bezeichnet hatte.

Diese Exponenten-Summe ist in dem Coefficienten zu x^0, $m+h$. Sie ist in dem ersten Theile in der Formel des §. 17, $m+h-1$, und so ferner in jedem nächstfolgenden Theile jedesmal um Eins kleiner. Z. B. in dem vierten Theile $m+h-4$.

2) Dieß giebt die verschiedenen Produkte aus den Potenzen von a und α, die zu diesen Theilen gehören, deren Verschiedenheit wiederum die Unterarten oder Unterabtheilungen macht. Z. B. für den 4ten Theil der Formel §. 17, wo die Summe der Exponenten von α und a ist $m+h-4$, hat man folgende Abtheilungen:

$$a^{m-4} . \alpha^h$$
$$a^{m-3} . \alpha^{h-1}$$
$$a^{m-2} . \alpha^{h-2}$$
$$a^{m-1} . \alpha^{h-3}$$
$$a^m . \alpha^{h-4}$$

3) In jeder dieser Potenzen schreibe man aus der obigen Formel für

$$T(a++|n|)^m = m.a^{m-1}|n| + \frac{m.m-1}{1.2} a^{m-2} . T(b++|n-1|)^2 ++$$

und aus der für

$$T(\alpha + + |\nu|)^h = h\,\alpha^{h-1} |\nu| + \frac{h.\,h-1}{1.\,2} \alpha^{h-2}\, T(\beta + + |\nu-1|)^2 + +$$

die zu jeder derselben gehörigen Binomial-Coefficienten.

Hiezu 4) die zu eben denselben Potenzen gehörigen Polynomial-Coefficienten aus den beyden letztern Formeln, nur so, daß sie alle für den gleichvielten Coefficienten genommen werden, nach No. 4. und 5.

5) Es enthält also der vierte Theil folgende Stücke:

$$\frac{m.\,m-1.\,m-2\,m-3}{1.\,2.\,3.\,4} a^{m-4} . \alpha^h . T(b + + |n-3|)^4$$

$$+ \frac{m.\,m-1.\,m-2.\,h}{1.\,2.\,3.\,1} a^{m-3} . \alpha^{h-1}\, T(b + + |n-3|)^3 (\beta + + |\nu-3|)$$

$$+ \frac{m.\,m-1.\,h.\,h-1}{1.\,2.\,1.\,2} a^{m-2} . \alpha^{h-2}\, T(b + + |n-3|)^2 (\beta + + |\nu-3|)^2$$

$$+ \frac{m.\,h.\,h-1.\,h-2}{1.\,1.\,2.\,3} a^{m-1} . \alpha^{h-3} . T(b + + |n-3|) . (\beta + + |\nu-3|)^3$$

$$+ \frac{h.\,h-1.\,h-2.\,h-3}{1.\,2.\,3.\,4} a^m . \alpha^{h-4} . T(\beta + + |\nu-3|)^4$$

Anmerkung 2. Wenn z. B. $m = 3$ ist, so fällt hier das Stück, worin a^{m-4} vorkommt, aus. — Es können sonst *m* und *h*, gleich oder ungleich seyn.

Ist $m = 3$, $h = 3$, so fällt außer dem ersten Stück auch das letzte weg.

19. Anmerkung 3. Der Coefficient $T(b + + |n|)$ $(\beta + + |\nu|)$ kann angesehen werden als ein Theil, der keine Entwickelung der Substitution weiter bedarf, nach Satz 1. §. 4. Die übrigen erfordern Substitutionen, die nach derselben Formel gemacht werden.

Wie viele aber auch solcher Substitutionen nöthig sind, so zeigt sich doch auch hier, wie oben §. 10, daß es unmöglich ist, noch weniger zu machen, wenn die heterogenen Produkte, die in dem gesuchten Coefficienten enthalten sind, alle angegeben werden sollen. Die Formel giebt diese Produkte also auf dem kürzesten Wege [r]).

Man kann aber auch hier jeden Theil, als eine eigene Klasse von Produkten, oder auch jede Unterabtheilung, die zu einer Klasse gehört, außer ihrer Ordnung herausnehmen und für sich entwickeln.

20. Satz 7. Die Summe aller Coefficienten in $(a + bx + cx^2 + \ldots)^m$ bis auf den nten, diesen eingeschlossen, wird gefunden, wenn in der allgemeinen Formel, und zwar in allen Theilen derselben, nach und nach, statt $|n|$, $|n-1|$, $|n-2|$ u. s. f. die vor diesen vorhergehenden Coefficienten aus dem ursprünglichen Polynomium gesetzet, bis auf den ersten in jedem Theil zurück, und dann diese Wehrte summirt werden. Die Summirung ge-

r) Daß auch hier Substitutionen in Substitutionen, und zwar häufiger als vorher (Note l) vorkommen müssen, erhellet schon aus der Menge der einzelnen Potenz-Coefficienten, und wird auch hier ausdrücklich erinnert. Wenn aber Herr T. behauptet, seine Formel (§. 17.) gebe diese Produkte auf dem kürzesten Wege, so muß ich mich darüber eben so, wie in der Note m erklären; ja ich kann mit Grunde behaupten, daß Jedem, der selbst prüfen will, vornehmlich bey dem hier (§ 17.) aufgeführten Produkteuprobleme, der Vorzug der Combinationsmethode (die sich vornehmlich bey großen Verwickelungen recht wirksam zeigt) sehr einleuchtend in die Augen fallen werde. Man versuche nur, auf eine der hier im Texte ausgedrückten ähnliche Art, den Werth von $(R^s\, Q^b\, P^m)^{n4}$ in einer Formel anzugeben, den ich im Arch. d. Math. (H. 2. S. 227, 7.) aus der dortigen so einfachen und leichten combinatorischen Formel entwickelt dargestellt habe. Schon dieser einzige Versuch wird die große Schwierigkeit der Sache von dieser Seite deutlich darlegen. H.

schieht bey allen Theilen auf dieselbe Art, wie bey dem Ersten, $m a^{m-1} |n|$. Von diesem ist die Summe $a^m + m a^{m-1} (b + c + + |n|)$.

Beweis.

Es ist nämlich der nte Coefficient, oder

$$T(a+b++|n|)^m = m.a.^{m-1}|n| + \frac{m.m-1}{1.\ 2} a^{m-2} T(b++|n-1|)^2$$
$$+ \frac{m.\ m-1.\ m-2}{1.\ 2.\ 3} a^{m-3} T(b++|n-2|)^3$$
$$++ T(b++|n-(m+1)|)^m$$

Setzet man in dem ersten Theile statt $|n|$ nach und nach alle vorhergehenden Coefficienten, bis auf a, diesen mitgenommen, als den Coefficienten zu x^0, so wird die Summe aller $m a^{m-1} |n|$ oder

$$\int . m a^{m-1} |n| = a^m \text{ (für a anstatt } |n|\text{, nach § 7.)}$$
$$+ m a^{m-1} b + m a^{m-1} c ++ m a^{m-1} |n|$$
$$= a^m + m a^{m-1} (b + c ++ |n|)$$

Ferner ist $T(b++|n-1|)^2 = 2.b.|n-1| + T(c++|n-2|)^2$ und wiederum $\int. 2.b.|n-1| = b^2 + 2b(c+d++|n-1|)$

Auch $T(b++|n-2|)^3 = 3.b^2|n-2| + 3.bT(c++|n-3|)^2$
$+ T(c++|n-4|)^3$
und $\int 3b^2|n-2| = b^3 + 3b^2(c+d++|n-2|)$

Folglich

$$\int T(a+b++|n|)^m = a^m + m.a^{m-1}(b+c++|n|)$$
$$+ \frac{m.\ m-1}{1.\ 2.} a^{m-2}((b^2+2b.(c+d++|n-1|)) + \int T(c++|n-2|)^2)$$
$$+ \frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 3} a^{m-3}((b^3 + 3b^2(c+d++|n-2|))$$
$$+ 3.b.\int T(c++|n-3|)^2 + T(c++|n-4)^3)$$
$$+\ +$$

21. **Zusatz** 1. Wenn man für die Binomial-Coefficienten, m, $\frac{m.m-1}{1.2}$ u. s. f. schreibt A, B, C, D u. s. f. und man setzet die Auflösung weiter fort, so ergiebt sich:

$$
\begin{aligned}
\int. T(a++|n|)^m = & \; a^m + A a^{m-1}(b + c ++ |n|) \\
& + B a^{m-2} \left\{ \begin{array}{l} b^2 + 2b(c + d ++ |n-1|) \\ + c^2 + 2c(d + e ++ |n-2|) \\ + d^2 + 2d(e + f ++ |n-3|) \end{array} \right\} \\
& \quad + + + \\
& + C a^{m-3} \left\{ \begin{array}{l} b^3 + 3b^2(c + d ++ |n-2|) \\ + 3bc^2 + 3.2.b.c.(d+e++|n-3|) \\ + c^3 + 3c^2.(d + e ++ |n-4|) \\ + 3cd^2 + 3.2.c.d.(e+f++|n-5|) \\ + d^3 + 3d^2(e + f ++ |n-6|) \end{array} \right\} \\
& \quad + + +
\end{aligned}
$$

wo sich das Gesetz des Fortgangs deutlich zeigt [s]).

22. **Anmerkung** 1. Die oben schon im §. 10 und 11 bey der ersten Formel gemachten Anmerkungen lassen sich bey dieser zum Theil wiederholen. Alle **heterogene** Produkte, die in der ganzen Coefficienten-Summe enthalten sind, werden mit ihrer Anzahl in den Zahlen-Coefficienten auf einmal gegeben. Und bey der Entwickelung kann man die verschiedenen Gattungen, wozu eine jede Art dieser Produkte gehört, auch außer ihrer Ordnung herausheben.

s) Die hier aufgestellten, aus der Formel (§. 20.) durch Substitution abgeleiteten Glieder, enthalten zugleich den Werth der Potenz $(a + b + c + d + e + f +$ ic.$)^m$, wie auch unten (§. 24.) erinnert wird, und kommen in der Folge der Buchstaben mit meiner Darstellung ((*Infin. Dignit. p.* 26, 1) überein. Das Gesetz des Fortgangs der Glieder dürfte doch, aus denen im Texte entwickelten, nicht Jedem deutlich einleuchten. Ein leichtes combinatorisches Gesetz wird in der folgenden Note t nachgewiesen. H.

Anmerkung 2. Wenn man einmal die Entwickelung festgesetzt hat, bis auf den Theil b^m, (falls ein solcher vorhanden ist, wie er ist, wenn $n = m + 1$, oder größer); so ist die noch fernere Entwickelung bloß eine Wiederholung der schon geschehenen. Man schreibt nur *b* statt *a*, und so statt eines jeden der ersten Coefficienten den nächstfolgenden, so wie unter den letzten statt $|n|$ alsdann $|n-m+1|$, und statt der vorhergehenden von jenem die vorhergehenden von diesem, bis die Reihen abbrechen.

Anmerkung 3. Hat das ursprüngliche Polynomium nur eine bestimmte Zahl von wirklichen Theilen, nemlich $|\nu|$, und die Zahl der Coefficienten in $(a + bx + + |n| x^{n-1})^m$ oder deren Summe man sucht, ist *n*, das von der letzte zu x^{n-1} gehört, und ist *n* größer als ν, so giebt man (eben so wie oben §. 6.) jenem ursprünglichen Polynomium *n* Theile, davon alle, die auf den νten folgen, Nullen sind.

23. Zusatz 1. Ist *n* so groß als die Zahl aller Coefficienten in $(a + bx + + |\nu| x^{\nu-1})^m$, welche $(\nu-1)m + 1$ ist, so erhält man die Summe aller Coefficienten der *m*ten Potenz. Und dann ist es einerley, ob *n* nun noch größer genommen werde oder nicht, weil dadurch jene Summe nicht vergrößert wird. Mann kann also *n* so unbestimmlich groß annehmen, daß in der obigen Formel $n-1$, $n-2$, $n-3$, u. s. f. alle noch größer sind als ν. Dann werden alle Reihen die in der Formel (§. 21.) bey $|n-1|$, $|n-2|$, $|n-3|$, u. s. f. abbrechen, fortgehen bis $|\nu|$. Auf diese Art erhält man die ganze Summe der Coefficienten in $(a + bx + + |\nu| . x^{\nu-1})^m$.

24. Satz 8. In den Polynomien der zwoten Art (§. 1.) $(a + b + c + d + + |\nu|)^m$, wo die Theile nicht nach den Potenzen einer veränderlichen Größe geordnet werden, sind sie

doch auf dieselbe Art geordnet, wie es die Theile sind in der Coefficientensumme von $(a + bx + cx^2 + + |\nu| x^{\nu-1})^m$. Man findet sie also in der Formel nach §. 20, wenn man damit so verfährt, wie im Zusatz 3. §. 23 angegeben ist, nemlich, wenn man |n| unbestimmlich groß nimmt.

$$\text{Man hat also } (a + b + c + d + + |\nu|)^m$$
$$= \int \Gamma (a + + |\nu|)^m$$
$$= A a^{m-1} \int |\nu| + B. a^{m-2}. \int \Gamma (b + + |\nu|)^2$$
$$+ C a^{m-3} \int \Gamma (b + + |\nu|)^3 + +$$
$$= a^m + A a^{m-1} (b + c + d + + |\nu|)$$
$$+ B a^{m-2} \left\{ \begin{array}{l} b^2 + 2b(c + d + + |\nu|) \\ + c^2 + 2c(d + e + + |\nu|) \\ + d^2 + 2d(e + f + + |\nu|) \\ \quad + + \\ \quad (|\nu|)^2 \end{array} \right\}$$
$$+ C a^{m-3}. \left\{ \begin{array}{l} b^3 + 3b^2(c + d + + |\nu|) \\ + 3bc^2 + 3.2.\, b\, c.(d + e + + |\nu|) \\ + c^3 + 3c^2(d + e + + |\nu|) \\ + 3cd^2 + 3.2.cd(e + f + + |\nu|) \\ + d^3 + 3.2.d.e.(f + g + + |\nu|) \\ \quad + + + \\ \quad (|\nu|)^3 \end{array} \right\}$$
$$+ + \text{ t)}$$

t) Diese durch Substitution hier abgeleiteten Glieder für $(a + b + c + d\ldots)^m$ kommen mit den Gliedern meiner Formel (*Infin. Dign. p* 40.) vollkommen überein, bey welchen das simple combinatorische Verfahren (Ebendas. p. 17, 18) zum Grunde liegt, welches also, so wie das allgemeine Glied (Ebendas p. 41) den Fortgang der Glieder deutlich nachweiset, wofür man auch die Tafel (Ebend. p. 157, 158) wenn man darinn b, c, d... für a, b, c... setzt, gebrauchen kann. Die Formel (*Infin. Dign. p.* 40) die ich hier nur wegen der dort entwickelten Glieder angeführt habe, ist mit den (Ebend.

25. Zusatz 1. In welcher Folge auch die Theile in dem ursprünglichen Polynomium $(a+b+c+\dots+|v|)$ geschrieben werden, so enthält doch die Summe $(a+b+c+\dots+|v|)^m$ eben dieselben heterogenen Produkte, und von jeder Art dieselbe Anzahl, man mag die Theile in dem ursprünglichen Polynomium in jeder andern Ordnung setzen, wie man will. Die Potenzen von *a* sind also mit den Potenzen von *b* auf eben so vielfach verschiedne Arten verbunden als die Potenzen von *b* mit denen von *a*. Dasselbe findet sich bey jedem andern einfachen Theile in $a+b+c+\dots+|v|$. Jeder Theil nemlich ist mit jedem andern auf eine ähnliche Weise als Mit-Factor in den heterogenen einfachen Produkten verbunden. Ebendasselbe gilt denn auch von der ganzen Coefficienten-Summe in $(a+bx+cx^2+\dots+|v|x^{n-1})^m$

Nach Anleitung der obigen Formel können zuerst die Ordnungen aufgesucht werden, die durch die Potenzen a^m, a^{m-1}, a^{m-2}, u. s. f. characterisirt sind. In dieser Ordnung hat man alle Theile, in denen eine Potenz von *a*, mit den folgenden Theilen *b*, *c*, ... und ihren Potenzen verbunden sind. Alsdann geht man zu den Ordnungen die durch Potenzen von *b* characterisirt werden, worunter diejenigen Theile nur kommen, worinn Potenzen von *b* mit den auf *b* folgenden Theilen und deren Potenzen beysammen sind, worinn aber *a*, das ist ein vorhergehender Theil, nicht mehr enthalten ist. — Weiter folgen die durch *c* charakterisirten Classen. Diese haben *c*, nur mit den auf *c* folgenden Factoren, wo schon *a* und *b* ausgegan-

p. 119, 146, 147 und (*Nov. Syst. Perm. p. LIV, 7, 8*) angeführten einerley; aber, welcher Unterschied in Absicht auf lichtvolle Darstellung, welche die combinatorischen Zeichen mit ihren über alles leichten Entwickelungen in den letzten Formeln verschaffen! Man sehe Toepfers comb. Anal. Note oo, S. 69, 70.

H.

gen sind. Auf dieselbe Weise geht man weiter fort. Die folgenden Classen werden immer kleiner und kürzer. [u])

Wenn aber die erste Ordnung oder Classe, deren Charakteristik *a* ist, entwickelt worden, so macht man daraus die zweyte, deren Charakteristik *b* ist, wenn in dem ersten anstatt *a*; *b*, und statt jedes andern Theils der nächstfolgende gesetzet wird, so weit dieß gehet.

26. Zusatz 2. Ist $(a + b + c + +)$ ein Infinitinomium, so giebt die Formel in §. 24. alle Theile von $(a + b + + + |\nu|)^m$. Darunter ist aber keiner von den auf $|\nu|$ folgenden Factoren. Allein man kann diesen Theil $|\nu|$ so weit hinaussetzen, wie man will, und man sieht das Gesetz für jede Classe in infinitum.

27. Anmerkung. Die Produkte $(a + b + c + +)^m$. $(\alpha + \beta + \gamma + + +)^h = p^m q^h$, werden nach der Formel (§. 17.) auf eine ähnliche Weise entwickelt. [v]) Ich halte es für weniger nöthig, darinn näher hinein zu gehen. Die Hauptsache ist immer die allgemeine Polynomialformel, aus der alles übrige leicht hergeleitet wird. Ich kann auch nun meines Versprechens mich entlediget halten, für die von mir in den Schriften der Königl. Dänischen Gesellschaft der Wissenschaften, (Neue Samml. 5ter Th. S. 131 u. f.) vorgelegten

u) Ein Beyspiel einer solchen Anordnung geben die Glieder meiner Tafel (*Infin. Dign.* p. 157, 158) für ganze positive Werthe von n, wie hier nur allein vorkommen. H.

v) Die Produkte . . . $s^g r^f q^h p^m$, oder das allgemeine Glied $(\ldots s^g r^f q^h p^m) \, 7 \, (n+1)$ derselben, erhält man aus meinen in Note q (Arch. der Math. S. 224-228) citirten Formeln, wenn man darinn $z = 1$ setzt; wo man die Variationsclassen zu bestimmten Summen, so wie sie die Formeln geben, lassen, oder solche, nach der combinatorischen Relation (*Nov. Syst. Perm. p.* XLIX, L, 2) in *Classes Variationum simpliciter* abändern kann. Das letzte würde die Glieder so geben, wie sie im Texte stehen würden, wenn der Herr Verfasser ihre nähere Entwickelung hier hätte beybringen wollen. H.

Formeln, worauf Probleme der Probabilitäts-Rechnung führten, die Beweise nachzuliefern. Diese sind nur specielle Formeln, die aus den hier vorgelegten und bewiesenen allgemeinen leicht hergeleitet werden. Zu den Vortheilen, welche die formula polynomii verspricht, rechne ich auch diese, daß sie als die **Vervollständigung der Wahrscheinlichkeits-Rechnung** angesehen werden kann, in so ferne die letztere bloß theoretische Arithmetik ist. w) Denn ein anderes ist es, in so ferne Grundsätze aus Erfahrung dazu erfordert werden, worauf jene angewendet werden soll.

w) Ausserdem, daß das Polynomialtheorem das wichtigste und am weitesten sich erstreckende der ganzen so viel umfassenden Wahrscheinlichkeitsrechnung ist, so dehnt sich auch sein Nutzen über die gesamte Analysis überhaupt, und die Reihen insbesondere, aus. Herr Prof. **Klügel** (in der **folgenden Abhandlung** §. 4) sagt daher sehr wahr und expressiv „der polynomische Lehrsatz gebe gleichsam einen hohen Standort ab, „von welchem man die Gefielde der Analysis übersehen könne; „auch gehöre (**Ebend.** §. 25) dieser Lehrsatz nicht sowohl der „Differenzialrechnung als der Analysis des Endlichen zu, welche außerdem kein für sich bestehendes Ganze ausmachen würde." Kein Wunder also, daß die Analysten seit de Moivre, sich gleichsam um die Wette beeifert haben, diesem Satze alle nur mögliche Vollendung in Absicht auf Darstellung und Entwickelung zu geben. Eine ausführliche Geschichte dieses höchstmerkwürdigen Lehrsatzes ist in meinem oftangeführten Werke, *Infinitinomii Dignitatum Historia etc.* enthalten. Als Erweiterung und Fortsetzung dieser Geschichte, sind noch hieher zu rechnen, mein Aufsatz im Archiv der reinen und angew. Mathem. (Heft IV. S. 385—424) und ein großer Theil des Inhalts der in gegenwärtiger Schrift befindlichen Abhandlungen. H.

II.

Bemerkungen über den Polynomischen Lehrsatz

von

G. S. Klügel.

Professor zu Halle.

---

1. Der Zweck dieser Abhandlung ist, die Gründe des für die ganze Analysis so wichtigen Polynomischen Lehrsatzes kurz und faßlich zu entwickeln, die drey Formen desselben deutlich darzustellen, insbesondere aber den Beweis der beiden combinatorischen Formen, unabhängig von dem Binomial-Theorem, für jede Gattung von Exponenten zu machen.

2. Die Analysis endlicher Größen besteht aus zwey Haupttheilen, die zwar durch gegenseitige Hülfsleistungen mit einander verbunden sind, aber nicht einer auf dem andern beruhen. Es sind gleichsam zwey Gebäude, jedes auf seinem besondern Grunde, deren Zimmer aber mit einander Gemeinschaft haben. Um die Vergleichung fortzusetzen, füge man hinzu, daß sie einen gemeinschaftlichen Vorhof, die Buchstabenrechnung, haben.

3. Diese beiden Theile sind die Algebra und die Analysis im engern Verstande.*) Jene beschäf-

*) Die Analysis der Alten, oder überhaupt die Analysis in der bloß zeichnenden Geometrie ist eine Methode bey der Auflösung der Aufgaben: die Analysis der Neuern ist ein System der höhern und allgemeinern Arithmetik. Ihre Methode kommt darin mit der geometrischen Analysis überein, daß bey der Un-

tigt sich mit den Eigenschaften der Gleichungen, der Zusammensetzung und Entwickelung derselben, wenn mehrere mit einander verbundene vorhanden sind, und mit der Darstellung des Unbekannten durch das Bekannte. Die eigentliche Analysis hat zum Gegenstande überhaupt die Formen der Größen, nemlich theils die Umwandlung einer Form in eine andere, theils die Darstellung der Glieder einer stetigen Fortschreitung durch die zugeordneten Glieder einer andern Reihe nach irgend einem Gesetze. [a]) Sie theilt die Größen ein in unveränderliche (oder bestimmte) und in veränderliche (oder unbestimmte); die Algebra, in bekannte und unbekannte. Die letztern sind entweder ganz bestimmt, oder, wenn sie nicht bestimmt sind, doch an gewisse Bedingungen gebunden, wie in der

tersuchung der Relation der Größen die unbekannten Größen eben so behandelt werden, als wenn sie bekannt wären. K.

a) Die Analysis beschäftiget sich vorzüglich mit den Functionen aller Art und ihren nach gegebenen Bedingungen erfolgenden Veränderungen; daher man sie auch zuweilen die Theorie der Functionen genannt hat. Diese Theorie, mit ihren sehr mannichfaltigen Modificationen, von sehr ausgedehntem Umfange, ist bis itzt noch so wenig erschöpft, daß das Viele Vorhandene doch nur als Bruchstück eines grossen vielumfassenden Ganzen anzusehen ist. Dahin gehören unter andern die wichtigen Abschnitte: *Functionum diversarum affectiones et relationes; functionum transformatio, siue in alias formas transmutatio; functionum explicatio et in series evolutio; functionum in factores resolutio; functionum limites*; u. a. m. Herr Prof. Klügel hat hier, zum eigentlichen Gegenstande der Analysis überhaupt die Formen der Größen, nach ihrer Entwickelung und Umwandlung in verschiedene Gestalten, angegeben; weil sich im Allgemeinen Alles, was wir von den Functionen und ihren Veränderungen wissen, darauf zurückbringen läßt. Auch Herr von Tempelhoff bezieht den großen Nutzen der Lehre von den Functionen vornehmlich auf die Verwandlung ihrer Formen (Anfangsgr. der Anal. endl. Gr. §. 784). Wie nützlich nun, vorzüglich bey Formenumwandlungen, und also recht eigentlich in analytischer Hinsicht, die combinatorischen Operationen, hauptsächlich diejenigen, die ich unter dem Namen von Involutionen bekannt gemacht habe, seyen, hat Herr Professor Klügel in der Folge dieses Aufsatzes sehr ausführlich gezeigt und dargethan. Hindenburg.

Diophanteischen Algebra. Beide gebrauchen zur Darstellung oder Zusammensetzung der Größen Gleichungen, die sich aber wesentlich unterscheiden. Z. B. in der algebraischen Gleichung $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$, wird die Relation einer oder dreyer Größen zu den gegebenen a, b, c, auf eine noch nicht entwickelte Art ausgedruckt. In der analytischen Gleichung $(a + x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$ werden zweyerley Formen mit einerley Bestandtheilen aufgestellt, woraus dieselbe Größe entsteht. Es ist eine Verwandlung des Produkts in ein Aggregat. Wenn aus jener Gleichnng x durch eine nach den Potenzen von a oder b oder c geordneten Reihe ausgedruckt wird, so sagt dieses etwas anders, als die Reihe $x = A + By + Cy^2 + Dy^3 + etc$; weil hier beide, x und y, veränderliche Größen sind, und das Gesetz der gemeinschaftlichen Bildung aller x in der Gleichung dargestellt wird. Die unveränderlichen Coefficienten sind Größen, die aus andern gegebenen hergeleitet werden, und daher ursprünglich unbekannte Größen. Die Algebra leistet hier ihre Dienste, wenn für dieselben y mehrere Reihen von x Statt finden, also die Coefficienten mehrere Werthe haben können. Denn für eine einzelne Reihe ist die Sache durch bloße Division abgethan, oder braucht auch dieser nicht. Die Algebra bedarf der Analysis mehr als diese jener, bey der Zusammensetzung der Coefficienten einer algebraischen Gleichung aus den Combinationen der Wurzeln; bey der Verwandlung einer Gleichung in ein Product, wobey es nothwendig ist, der Gleichung einen unbestimmten Werth zu geben; auch bey der Entwickelung der Cardanischen Formel, in dem Falle dreyer möglichen Wurzeln. Ueberhaupt ist die Analysis im engern Verstande der wichtigere Theil; theils wegen des Inhalts, da die Betrachtung der Formen eigentlich das Interessante in der Mathematik ist, theils wegen der mannigfaltigen Anwendung. Die Algebra macht sich durch ihre Dienste bey der Erfindung des Unbekannten

mehr nothwendig, als durch die Behandlung ihres Gegenstandes angenehm. Bey den Gleichungen vom dritten Grade schon geräth sie in eine gewisse Verlegenheit, muß die vom vierten Grade durch eine Art von Involution auflösen, und kann die Wurzeln der höhern Gleichungen gar nicht als durch Annäherung in bestimmten Zahlen finden.

4. Diese vorläufigen Bemerkungen sollen dienen, die Beziehung des polynomischen Lehrsatzes auf das ganze System deutlicher zu machen. Nach der Buchstabenrechnung, die sich mit den leichtesten Umwandlungen der Formen beschäftigt, kommt man, wenn man die Algebra liegen läßt, zunächst auf höhere Aufgaben der Multiplication, der Division und andere; [b]) also, wenn die Factoren, woraus eine Größe hervorgebracht, oder in welche sie zerlegt wird, unter einander gleich sind, auf den polynomischen Lehrsatz. Dieser ist gleichsam ein hoher Standort, von welchem man die Gefilde der Analysis übersehen kann. Um aber zu demselben zu gelangen, müssen einige Untersuchungen über die Verbindungen vieltheiliger Größen vorangehen. Diese betreffen die Fragen über die Ver-

b) Daher eben die bestimmte Ordnung der von mir (*Nov. Syst. Perm. p.* XXVII—XXXI.) aufgeführten Aufgaben, mit ihren analytisch-combinatorischen Formeln: 1) *Serierum in Series Multiplicatio* (*p.* LXIX—LXXVI.): 2) *Serierum per Series Diuisio* (*p.* LXXVII—LXXXIII.) 3) *Serierum Dignitates et Radices* (*p.* LIV—LVI.); 4) *Serierum in series substitutio*; dahin der *Methodus Potentiarum* (Infin. Dign. §. XXIV. p. 100 seq.) gehört, u. s. w. wo überall statt der algebraischen und transscendentischen, oft sehr beschwerlichen, die ungleich leichtern combinatorischen Operationen in den Formeln substituirt werden. Das Bestreben nemlich, diese und ähnliche Aufgaben auf dem leichtesten und natürlichsten Wege aufzulösen, führte mich unvermerkt auf Combinationsverfahren, die eine regelmäßige Anordnung und Darstellung der combinatorischen Operationen und Involutionen nothwendig machten. Die Sache wird dadurch so, über alle Vorstellung hinaus, leicht, weil man es hier mit den Elementen selbst, und deren nach sehr simpeln Regeln erfolgenden Zusammensetzung und Trennung, zu thun hat. H.

setzungen einer gegebenen Anzahl von Grössen oder Dingen, und die Combinationen einer bestimmten Anzahl Dinge aus einer gegebenen Menge derselben; wobey nicht allein die Anzahl der möglichen Versetzungen und Verbindungen anzugeben ist, sondern diese auch selbst nach einer faßlichen und sichern Regel darzustellen sind. Kommen in den Verbindungen einige Grössen mehrmahls vor, so müssen auch alle Gattungen, die in der Menge der wiederholten Dinge verschieden sind, aufgezählt werden können.

5. Die Frage von der Menge der Versetzungen einer bestimmten Anzahl von Dingen, und von der Menge der Verbindungen oder Combinationen, die von je n verschiedenen Grössen aus der ganzen Anzahl von m Grössen gemacht werden können, ist leicht. Ihre Auflösung findet sich in den Lehrbüchern der Analysis, insbesondere in Segners Analysis Finit. Sect. V. wo die Materie zum Behuf des binomischen und polynomischen Lehrsatzes abgehandelt ist. Ausführlichen und gründlichen Unterricht in dieser Untersuchung giebt Hr. Prof. Hindenburg in den primis lineis novi systematis permutationum, combinationum et variationum. Lips. 1781, und in der Schrift: Infinitinomii dignitatum historia, leges ac formulae, Göttingae, 1779. §. XXII. XXVII. Diesen sind einige neuere Abhandlungen desselben (in dem Archiv der Mathematik) über combinatorische Involutionen beyzufügen.

6. Da das Verfahren, Combinationen durch Involutionen darzustellen, neu und sinnreich ist, c) so setze

c) Die combinatorischen Involutionen haben, wegen ihrer so wichtigen Anwendung in der Analysis, den ungetheilten Beyfall der Kenner erhalten. Herr Professor Klügel schrieb mir darüber im vorigem Jahre: „Die Involutionen „habe ich mehrmals mit dem Vergnügen betrachtet, womit ein

ich ein etwas ausführlicheres Beyspiel an den Versetzungen her, als in dem 1sten Heft des Archivs, S. 23 gegeben ist. Der Vorsatz ist, die Versetzungen einer Anzahl von verschiedenen Größen so zu ordnen, daß darin die Versetzungen jeder kleinern Anzahl sichtbar werden. Z. B. es sind 6 Größen, a, b, c, d, e, f, gegeben, so wird die Forderung durch folgende Anordnung erfüllt:

```
a b c d e f
b a c d e f
c a b d e f
a c b d e f
b c a d e f
c b a d e f
d a b c e f
a d b c e f
  .       .
  .       .
  .       .
e a b c d f
a e b c d f
    .     .
    .     .
    .     .
d e a b c f
e d a b c f
  u. s. w.
```

Die hier in jedem Winkelhaken abgesonderten Versetzungen sind alle, welche von der darinn enthaltenen Anzahl Größen möglich sind. Man wird an dem Beyspiele die Regel des Verfahrens leicht entdecken. Wenn z. E. zu vier Größen, a, b, c, d, die fünfte e kommt, so setze man diese zuerst in die letzte Stelle zu jeder der Versetzungen von vier; darauf setze man in die letzte Stelle die vor e vorhergehende Größe d, und nehme in den bisherigen Versetzungen statt jedes Buchstaben den vorhergehenden, wobey e für a kommt, weil man sich die Größen in einem Kreise geschrieben vorstellen muß. Aus der zweyten Classe, die sich auf d endigt, wird auf dieselbe Art die Classe, die sich auf c endigt, hergeleitet u. s. w. Eine kleine Abweichung in der Folge der Versetzungen wird man bey der Vergleichung mit der in dem Archiv a. a. O. gesetzten bemerken. d)

„Kunstkenner vor einem schönen Gemälde, einer schönen Sta„tue stehen bleibt. Jede höhere Involution stellt zugleich „alle niedrigere dar, und diese sind nothwendige Pertinenz„stücke von jener. Die Wichtigkeit dieser Untersuchungen er„kenne ich vollkommen. Ohne eine befriedigende Darstellung „der combinatorischen Operationen, vorzüglich aber der Invo„lutionen, ist die Lehre von den Combinationen, worauf sich „doch so vieles gründet, äußerst mangelhaft. Ich werde in

7. Auch die Combinationen lassen sich durch Involutionen sehr bequem aufzählen. Es seyn z. B. 7 Größen, a, b, c, d, e, f, g, aus welchen je 4 verschiedene zu nehmen sind. Die Combinationen, welche a enthalten, sind folgende:

abcd	acde	adef	aefg
...e	...f	...g	
...f	...g	adfg	
...g	acef		
abde	...g		
...f	acfg		
...g			
abef			
...g			
abfg			

Die Combinationen, welche b ohne a enthalten, werden auf dieselbe Art aus den Größen b, c .. g gefunden; und auf ähnliche Art alle übrigen (*Infin. Dign. p.* 161. *Tab.* II.)

„der Folge bey schweren analytischen Untersuchungen sehr aufmerksam darauf seyn; auch hoffe ich von den Combinationen, „so wie von den Lokalzeichen und Formeln, in meinen weitern „Untersuchungen über die astronomischen Perturbationen guten „Gebrauch zu machen." Von den Involutionen überhaupt, mit Beziehung auf bestimmte Vorschriften und Beyspiele, mehrere Abhandlungen von mir (Arch. der Math. Heft I—IV). Von dem Eigenthümlichen dieser Art von figürlicher Anordnung insbesondere (Ebendas. H. III. S. 323—325). Von ihrer endlichen Vollendung in Absicht auf Allgemeinheit und Kürze der Darstellung, wird in der Folge (in meinem in dieser Schrift befindlichen Aufsatze) das Nöthige beygebracht werden. H.

d) Die Complexionen des Textes gehen nach fallenden Endbuchstaben f, e, d, c.., wie die bey mir (Arch. a. a. O.) nach steigenden Anfangsbuchstaben a, b, c, d...fort. Beides kann auf mehrere Arten geschehen. Versetzungen, ohne bestimmte Folge von Anfangs- oder Endbuchstaben (meine Beschreib. Zahlen abzumessen ꝛc. S. 93). Die Versetzungen im Archiv gehen unter sich, wie wachsende Zahlen fort; welches in vieler Rücksicht bequem ist.

H.

8. Die Größen, welche mit einander verbunden werden, sind entweder ein bloßes Aggregat, ohne ein Gesetz der Folge, wie die Größen der Reihe,

$$a + b + c + d + e + f + \text{etc.},$$

oder sie sind nach den Potenzen einer in ihnen als Factor enthaltenen gemeinschaftlichen Größe geordnet, auf eine ähnliche Art wie die Theile einer Zahl nach dem dekadischen System, wie in der Reihe,

$$a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 + \text{etc.}$$

Dieser verschiedenen Beschaffenheit der Größen zu folge ist auch die Verbindung derselben verschieden.

9. Wenn die Größen ohne ein Gesetz der Folge gedacht werden, so nehme man aus der Reihe,

$$a, \ b, \ c, \ d, \ e, \ f, \ \text{etc}$$

m Größen heraus. Diese mögen nun entweder alle verschieden seyn, oder eine, zwey, drey und mehrere derselben mögen mehrmals in die Verbindung aufgenommen werden, so ist die Frage, alle Arten der Verbindungen in Absicht auf die Menge der verschiedenen darinn enthaltenen Größen anzugeben. Z. B. wenn 5 Größen verbunden werden, so sind die verschiedenen Gattungen (*genera*) der Verbindung (*Infin. Dignit. p.* 168, 5)

abcde; aabcd; aabbc; aaabc;
aaabb; aaaab; aaaaa.

Diese Verbindungen sind unähnlich; dagegen abcde und bcdef, oder aabcd und abbcd, u. s. f. ähnliche Verbindungen sind, nämlich in Absicht auf die Auswahl der gleichen und ungleichen Größen, nicht in Absicht auf die Größen selbst. *). Allgemein sey die Anzahl der Größen

*) Hr. Prof. Hindenburg nennt Verbindungen (Complexiones) ähnlich, die in den Größen übereinkommen, und nur in der Stellung derselben verschieden sind. Novum Systema permutationum etc. §. II. 22. Ich würde diese gleichgültige nennen. K. Die Benennung „gleich-

$= m$, und $m = \alpha + \beta + \gamma +$ etc, so ist der allgemeine Ausdruck einer Verbindung von m Größen, $a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma}\, d^{\delta}\, e^{\varepsilon}$ ..... Um alle Gattungen unähnlicher Verbindungen zu erhalten, muß man demnach die Zahl m in alle mögliche ganze Zahlen, die Eins mit eingeschlossen, zerfällen. Setzt man $m = \alpha$, so fallen alle Größen neben a weg: ist $m = \alpha + \beta$, so bleiben nur a und b: ist $m = \alpha + \beta + \gamma$, so setzt man nur drey Größen a, b, c, zusammen, u. s. w.

Der allgemeine Ausdruck kann auch folgendergestalt abgefaßt werden, $a^{m-\alpha}\, b^{\alpha-\beta}\, c^{\beta-\gamma}$ ..... $k^{\iota-\varkappa}\, l^{\varkappa}$. (*Infin. Dignit. p.* 36, 37).

10. Wenn die Größen ein Gesetz der Folge haben, so sind die Verbindungen einer gegebenen Anzahl derselben nach den Potenzen, worauf die gemeinschaftliche in ihnen als Factor enthaltene Größe steigt, abzutheilen. Z. B. man nehme aus der Reihe,

$A;\ Bz;\ Cz^2;\ Dz^3;\ Ez^4;\ Fz^5;$ etc

heraus 5 Größen, welche in der Verbindung die vierte Potenz, z^4, enthalten. Die verschiedenen Verbindungen solcher Größen sind

$AAAAEz^4;\quad AAABDz^4;\quad AAACCz^4;$
$AABBCz^4;\quad ABBBBz^4.$

Bezeichnet man die Coefficienten von z durch ihre Stellen, wie folget,

0	1	2	3	4	5	6	
A,	B,	C,	D,	E,	F,	G,	etc.

so erhält man alle Verbindungen von m Größen mit derselben Potenz z^n, wenn man den Exponenten n in alle möglichen ganzen Theile zerlegt, deren Anzahl nicht größer als m ist, für diese Theile die dazu gehörigen Größen aus

gültige" würde zwar gut auf Producte aus Factoren, aber nicht allgemein für Complexionen aus combinatorischen Elementen, passen. H.

der Reihe B, C, D, etc. setzt, und zu den auf solche Art mit z^n verbundenen Größen, wenn es nöthig ist, noch so viele A fügt, daß die Anzahl aller = m wird. Solchergestalt sind, wenn das nte Glied der Reihe nach dem Anfangsgliede A durch N das (n-1)te, (n-2)te, (n-3)te... durch M, L, K... bezeichnet werden, und $n < m$ ist, die zu der Potenz z^n gehörigen Verbindungen:

$$A^{m-1} N z^n;\ A^{m-2} (B M + C L + \text{etc.}) z^n$$
$$A^{m-3} (B^2 L + B C K + \text{etc.}) z^n;\ \ldots\ldots$$
$$\ldots;\ A^{m-n} B^n z^n$$

Ist $n > m$, so kommen auch Verbindungen ohne A vor.

11. In beiden Fällen (9, 10) ist es erforderlich, eine gegebene ganze Zahl in alle ihre möglichen ganzen Theile zu zerlegen. Allein in dem ersten Falle ist diese Zahl die Anzahl der verbundenen Größen, in dem zweyten der Exponent von z. Sieht man in jenem Falle die Größen a, b, c, d, etc. als Größen von einer einzigen Dimension an, so werden die gesammten Verbindungen von m Dimensionen nach den Formen der Dimensionen ihrer Bestandtheile gesondert. In dem zweiten Falle aber kann man nicht den Größen A, B, C, etc. eine Dimension beylegen, weil sie bloß als numerische Coefficienten zu den Potenzen einer gewissen Größe z zu betrachten sind. Soll hier auf Dimensionen Rücksicht genommen werden, so werden diese durch den Exponenten der Potenz von z bestimmt. Die gesammten Verbindungen werden hier nach den Potenzen von z^n, oder den Dimensionen, worauf z steigt, geordnet. In jeder einzelnen Verbindung mit einer gegebenen Potenz z^n ist die Summe der Abstände der Factoren von dem Anfangsgliede A gleich dem Exponenten n, da für A der Abstand = 0 ist. Die Anzahl der Factoren ist = m.

12. Es ist nicht leicht, eine sichere und bequeme Regel zur Zerfällung einer ganzen Zahl in alle ihre möglichen ganzen Theile zu geben. Leibnitz ist der erste, der

auf die Frage von der Zerfällung der Zahlen gedacht hat; er stieß sich aber an der großen Mannigfaltigkeit der Theile, die er einen weiten Abgrund nannte. Euler hat zwar in der Introd. in Anal. Infin. T. I. Cap. XVI. und in den novis Comm. Petrop. T. III. gezeigt, wie die Anzahl der verschiedenen Zerfällungen zu finden ist, hat aber nicht gewiesen, wie die einzelnen Zerfällungen selbst vollständig darzustellen sind. Er sagt, bey der wirklichen Aufstellung aller Zerfällungen werde man, aller Aufmerksamkeit ungeachtet, dennoch schwerlich einen Verstoß vermeiden können. Boscovich lehrte zuerst 1747 in einem Italienischen Journal eine Methode alle Zerfällungen zu finden (Arch. der Math. IV. Heft S. 402 u. f.). Ohne diese zu kennen, trug Hr. Prof. Hindenburg seine, von jener ganz verschiedene, Auflösung der Aufgabe von der Zerfällung der Zahlen in einer akademischen Schrift vor: Methodus nova et facilis serierum infinitarum exhibendi dignitates, Lips. 1778, und hernach in einer ausführlichern Schrift: Infinitinomii dignitatum historia, leges ac formulae. Göttingae 1779. (§. XXII.). Eine zweyte Auflösung hat derselbe in einem akademischen Programm 1795, und in dem Archiv der Mathematik (IV. Heft S. 393) mitgetheilt. Damit man alle drey Auflösungen mit einander vergleichen könne, setze ich von denselben ein Beyspiel an den Zerfällungen der Zahl 7 her.

Nach Boscovich.	Nach Hindenburg I.	Nach Hindenburg II.
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1	7	1 1 1 1 1 1 1
2, 1, 1, 1, 1, 1	1, 6	1 1 1 1 1 2
2, 2, 1, 1, 1	2, 5	1 1 1 1 3
2, 2, 2, 1	3, 4	1 1 1 2 2
3, 1, 1, 1, 1	1, 1, 5	1 1 1 4
3, 2, 1, 1	1, 2, 4	1 1 2 3
3, 2, 2	1, 3, 3	1 1 5
3, 3, 1	2, 2, 3	1 2 2 2
4, 1, 1, 1	1, 1, 1, 4	1 2 4
4, 2, 1	1, 1, 2, 3	1 3 3
4, 3	1, 2, 2, 2	1 6
5, 1, 1	1, 1, 1, 1, 3	2 2 3
5, 2	1, 1, 1, 2, 2	2 5
6, 1	1, 1, 1, 1, 1, 2	3 4
7	1, 1, 1, 1, 1, 1, 1	7

Die Darstellung der Zerfällungen nach Boscovich ist zu dem Gebrauch bey dem polynomischen Lehrsatze oder zu Combinationen überhaupt nicht so bequem, als die beyden von Hrn. Hindenburg gefundenen, und die Abtheilung nach jener kann sehr leicht aus diesen hergeleitet werden. Die erste Hindenburgische Zerfällungsart dient vorzüglich, wenn mit der Zerfällung zugleich die Abtheilung nach der Anzahl der Theile (nach Classen) verlangt wird; wie dieses bey der zweyten Form des polynomischen Lehrsatzes der Fall ist. Die zweyte Hindenburgische Zerfällungsart ist in so fern von noch allgemeinerm Gebrauche, weil nach derselben, mit den Zerfällungen einer Zahl zugleich die durch Winkelhaken von einander gesonderten Zerfällungen aller kleinern dargestellt werden. Dieses ist gerade dasjenige, was bey dem polynomischen Lehrsatze, nach den beiden ersten Formen desselben, zu leisten ist. Zwar liegen die Zerfällungen der kleinern

Zahlen auch nach der erstern Methode in den Zerfällungen der größern; allein weil sie da von einander getrennt liegen, lassen sie sich nicht so bequem durch einen einzigen Winkel auszeichnen, als die Abtheilung nach dem zweyten Schema sich machen läßt. Die zweyte Hindenburgische Zerfällunsart ist auch, an sich betrachtet, die vorzüglichste, indem sie die Aufgabe von der Zerfällung der Zahlen auf die allgemeinste Art auflöset. e)

Bey den Zerfällungen nach beiden Hindenburgischen Methoden ist wohl zu merken, daß die Zahlen nach ihrer natürlichen Folge geordnet (Herr H. nennt es gut geordnet) werden müssen. Nach der ersten wird der letzte Theil jeder Complexion (einzelnen Zerfällung) in zwey zerlegt, um die Complexionen der folgenden Classe zu bekommen, so fern dadurch nicht eine kleinere Zahl nach einer größern zu stehen kommt, weil eine solche Complexion schon unter den vorhergehenden befindlich seyn muß, wenn sie nach der Folge der Zahlen geordnet sind. Nach der zweyten Methode wird den Zerfällungen einer Zahl entweder 1 vorangesetzt, oder es wird der niedrigste Theil um 1 vergröß-

e) In Absicht auf Allgemeinheit scheint mir meine zweyte Art der Zerlegung keinen Vorzug vor der ersten zu haben, wohl aber in Ansehung der etwas größern Leichtigkeit in der Darstellung, wegen des einfachern Gesetzes der Zusammensetzung. Dagegen ist, in Beziehung auf die Analysis überhaupt (nicht blos in Rücksicht auf den polynomischen Lehrsatz) meine erste Art von Zerlegung (nach Classen von gleichvielen Theilen) von weit ausgedehnterm Umfange in der Anwendung als die zweyte; weil es unzählig viele Fälle giebt, wo man nur die Complexionen einzelner Classen (der einzelnen Abtheilungen zwischen den horizontalen Linien) nicht aber aller Classen zusammen nöthig hat. Auch enthält meine erste Art zweyerley Involutionen 1) der niedrigern Summen durch alle Classen 2) der niedrigern Classen zu verschiedenen Summen in den einzelnen Classen; und man kann jede der beiden übrigen, hier im Texte angeführten Anordnungen, augenblicklich aus ihr darstellen. Das Letzte gilt auch von den beiden andern Anordnungen, und ist eine natürliche Folge davon, daß man bey den Combinationsverfahren immer alle Elemente in der Zusammensetzung vor sich hat. H.

fert, wieder mit Beobachtung des obigen Gesetzes. Diese zweyte Methode ist also eine Composition, so wie die erste eine Resolution.

Damit man deutlich einsehe, wie die Zerfällungen für Involutionen größerer Zahlen sich nach der zweyten Hindenburgischen Methode an die der kleinern anschließen, und auch, um die Zerfällungen etwas weiter zum Gebrauche fortzusetzen, folgen hier die Complexionen der Summen 8; 9; 10. Die Involutionen für die Summen 7; 8; 9; 10. sind hier durch ^7J, ^8J, ^9J, ^{10}J bezeichnet (Arch. der Math. H. IV. S. 417, 418).

Complex. für ^8J	Complex. für ^9J	Complex. für ^{10}J
1, ^7J	1, ^8J	1, ^9J
2, 2, 2, 2	2, 2, 2, 3	2, 2, 2, 2, 2
2, 2, 4	2, 2, 5	2, 2, 2, 4
2, 3, 3	2, 3, 4	2, 2, 3, 3
2, 6	2, 7	2, 2, 6
3, 5	3, 3, 3	2, 3, 5
4, 4	3, 6	2, 4, 4
8	4, 5	2, 8
	9	3, 3, 4
		3, 7
		4, 6
		5, 5
		10

Die Anfangszahlen folgen nach ihrer Größe auf einander; eben so die Zahlen in der zweyten Stelle, so weit die Zahlen in der ersten dieselben sind; wieder eben so die Zahlen in der dritten Stelle, so weit die in den beiden ersten Stellen dieselben bleiben; u. s. f. Die Zerfällungen, welche keine Eins enthalten, sind hier unabhängig von den vorhergehenden Zerfällungen gefunden worden, auf welche Art sich auch die Zerfällungen ohne 1 und 2;

ohne 1; 2; 3, u. s. f. finden lassen. Wie die Zerfällung mit einer bestimmten Anzahl von Theilen, ohne die übrigen, bewirkt werde, zeigt Hr. Hindenburg in der Schrift: Infinit. dign. pag. 80.

13. Bey den Verbindungen von m Größen aus einer Reihe, die kein Gesetz der Folge hat,

a, b, c, d, e, f, g, etc.

sind die Theile in den Zerfällungen der Zahl m die Exponenten der Größen, die zu einer Verbindung genommen werden. Man braucht also nur aus der Tafel der Complexionen jeden Bestandtheil einer Complexion von der Summe m als Exponenten zu einer der Größe aus der Reihe zu setzen, so erhält man jedesmahl eine Gattung einer Complexion, die hernach noch durch Veränderung und Versetzung der Größen abgeändert wird, sich aber ähnlich bleibt. Man ordne diese Complexionen nach der Folge der höchsten Exponenten, z. B. für $m = 7$,

$abcdefg$;	a^2bcdef;	a^3bcde;	a^4bcd
	a^2b^2cde;	a^3b^2cd;	a^4b^2c
	$a^2b^2c^2d$;	$a^3b^2c^2$;	a^4b^3
		a^3b^3c;	

a^5bc;	a^6b;	a^7.
a^5b^2		

Die Anordnung ist hier nach der von Boscovich gebrauchten (§. 12.) gemacht worden.

14. Sind die Größen an ein Gesetz der Folge gebunden, wie in §. 10, so bedeuten die Theile einer zerlegten Zahl die Abstände der Glieder der Reihe von dem Anfangsgliede. Man setze also die Zahl selbst dem Exponenten von z in einer Verbindung gleich, und für die Theile der Zahl die Größen, deren Stellen sie angeben, so erhält man alle Verbindungen mit der gegebenen Potenz z^n. So entstehen aus der Reihe

a; bz; cz^2; dz^3; ez^4; fz^5; gz^6; hz^7 etc.

durch die Multiplication der Glieder folgende Produkte mit dem Factor z^7

$$\left\{ \begin{matrix} h; & bg; & b^2f; & b^3e; & b^4d; & b^5c; & b^7 \\ & cf; & bce; & b^2cd; & b^3c^2; & & \\ & de; & bd^2; & bc^3; & & & \\ & & c^2d; & & & & \end{matrix} \right\} z^7$$

Hiezu ist eine Tafel am bequemsten, worin die Complexionen nach der Anzahl der Theile (classenweise) geordnet sind, wie die zweyte, oder die erste Hindenburgische (§. 12). Der Factor a wird bey der Bildung einer Potenz vom Exponenten m so oft zugesetzt, als nöthig ist, um m Factoren zu der Potenz z^n zu bringen.

15. Nunmehr ist der Weg zu dem polynomischen Lehrsatze völlig gebahnt. Dieser hat zwey Hauptformen. In der einen werden die Glieder der Potenz aus den Gliedern der Wurzel unmittelbar zusammengesetzt, und diese Form ist von zweyfacher Art, nach Beschaffenheit der Theile der Wurzel. Diese sind nämlich entweder ganz unverbundene Größen: a; b; c; d; e; etc, oder sie sind nach den Potenzen einer Größe z geordnet, daher auch die Glieder der Potenz nach diesen zu ordnen sind. Die zweyte Hauptform ist diejenige, in welcher jeder Coefficient der Potenzen z^n, nach welchen die Glieder der Wurzel und der Potenz geordnet werden, aus allen vorhergehenden zusammengesetzt wird. Auf die erste Hauptform kommt man bey der unmittelbaren Entwickelung einer Potenz durch die Multiplication; auf die zweyte bey dem Gebrauche einer Reihe mit unbekannten Coefficienten, welche die gesuchte Potenz darstellt. Für diese unbekannten Coefficienten *)

*) Nicht coefficientes ficti, sondern incogniti oder assumti. Die unbekannte Größe in einer Gleichung ist keine erdichtete Größe.
R.

Der Ausdruck *Coefficientes ficti* ist von Leibnitzen. Fictos nennt er, *qui assumuntur tanquam dati*, und setzt sie so immer den datis, durch die sie sich bestimmen lassen, entgegen.

werden Gleichungen gesucht, und diese sind es, welche jeden durch den vorhergehenden liefern. Die beiden Gattungen der ersten Hauptform können die combinatorischen Formen heißen, die zweyte Hauptform aber die involutorische.

16. Es soll nun erstlich die vieltheilige Größe $a + b + c + d + e + f +$ etc $= Q$ auf die Potenz mit dem ganzen positiven Exponenten m erhoben werden.

Diese Potenz besteht aus Partialprodukten von der Form $a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} d^{\delta} \ldots$, in welchen die Summe der Exponenten $\alpha + \beta + \gamma + \delta +$ etc $= m$ ist, und die Größen a, b, c, d, etc. auf jede beliebige Art aus der Reihe Q genommen werden können. So viele Zerfällungen die Zahl m zuläßt, so viele Formen von Partialprodukten sind möglich. Dasselbe Literalprodukt ferner, mit denselben Größen, wie a, b, c, d, etc. und denselben Exponenten wie $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. kann mehrmahls vorhanden seyn, weil die Factoren auf verschiedene Arten aus den gleichen Factoren der Potenz Q^m genommen werden können. Man unterscheide diese gleichen Factoren nach den Stellen ihrer Folge, als

I. $a + b + c + d +$ etc.
II. $a + b + c + d +$ etc.
III. $a + b + c + d +$ etc.

u. s. f. Jeder dieser Hauptfactoren giebt einen einzelnen Theil als Factor zu einem Partialprodukte her. Man ordne die Partialfactoren nach den Stellen der Hauptfactoren, woraus sie genommen sind. Z. B. aabdabce, so daß die beiden a aus I. und II. der dritte b aus III. u. s. f.

So habe ich auch die Coefficientes fictos (*Nov Syst. Perm. p.* XXXIV, 4.) erklärt, und mit der dortigen Bezeichnung überall gebraucht. Deutsch können sie angenommene (durch die gegebenen zu bestimmende) genannt werden. H.

genommen seyn. Nun ist klar, daß ein und dasselbe Literalprodukt so oft vorkommt, als oft die Hauptfactoren I. II. III. etc. sich wechseln lassen. Wenn alle Partialfactoren ungleich sind, so ist wieder klar, daß die Menge der Abwechslungen der Hauptfactoren der Menge der Versetzungen von den Partialfactoren gleich ist, oder $= m.\ m-1.\ m-2 \ldots 2.\ 1.$ Sind unter den Partialfactoren α gleiche a vorhanden, so entsteht aus den α Hauptfactoren, woraus die a genommen werden, nur ein einziges Partialprodukt a^α, anstatt $\alpha.\ \alpha-1 \ldots 1$ Produkte, wenn die Factoren verschieden wären, und die Menge aller Partialprodukte für lauter ungleiche Factoren des Produkts abcde ... ist durch $\alpha.\ \alpha-1 \ldots 2.\ 1$ zu dividiren, wenn das Produkt ist $a^\alpha b c d \ldots$; oder die Anzahl der Partialprodukte von der Form $a^\alpha b c d \ldots$ ist $= \frac{m.\ m-1 \ldots 1}{\alpha.\ \alpha-1 \ldots 1}$. Auf gleiche Art ist, wenn außer dem Partialfactor a^α noch ein solcher b^β vorhanden ist, die gefundene Menge noch durch $\beta.\ \beta-1 \ldots 1$ zu dividiren. So ist die Anzahl der Partialprodukten $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots =$

$$\frac{m.\ m-1.\ m-2 \ldots 2.\ 1}{\alpha \ldots 1 \times \beta \ldots 1 \times \gamma \ldots 1 \times \delta \ldots 1 \times \text{etc.}},$$

eben diejenige mit der Anzahl der Versetzungen von m Factoren in $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots$ [f])

Man ordne die Partialprodukte nach den Potenzen einer der Größen, a, und zwar der größten unter ihnen, damit $\left(\frac{Q}{a}\right)^m$ außer der Eins, lauter eigentliche Brüche enthalte. Die Partialprodukte haben nun die Formen: a^m; $a^{m-1}b$; $a^{m-2}bc$; $a^{m-2}b^2$; $a^{m-3}bcd$; u. s. w. Es sey, $\alpha = m - r$, so ist die Anzahl der Partialprodukte

f) Noch zwey andere Gestalten, in welchen diese Formel zuweilen erscheint, und wie ihr Werth sogleich aus der Tafel der figurirten Zahlen (*Infin. Dign. p.* 162-165.) zu nehmen sey, habe ich (Ebend. §. XIII.) angegeben. H.

$$a^{m-r}\, b^{\beta}\, c^{\gamma}\, d^{\delta} \ldots\ldots = \frac{m.\,m-1.\,m-2\ldots\ (m-r+1)}{\beta\ldots 1\times\gamma\ldots 1\times\delta\ldots 1\times \text{etc.}} =$$

$$\frac{m.\,m-1\ldots(m-r+1)}{1\,.\,.\,2\ldots\ldots r} \times \frac{r.\ldots\ldots 1}{\beta\ldots 1\times\gamma\ldots 1\times\delta\ldots 1\times\text{etc.}}$$

Der erste gebrochne Factor ist der rte Binomialcoefficient der mten Potenz eines Binomium $a+b$, die Coefficienten von dem zweyten Gliede an gerechnet; der zweyte ist die Menge der Versetzungen von r Größen, von welchen eine β mahl, eine zweyte γ mahl, eine dritte δ mahl, u. s. w. vorkommt. Diese Versetzungszahlen nennt Herr Hindenburg Polynomialcoefficienten (Nov. Syst. Perm. p. IX, 24; XL, 10.). Für das Binomium $a+b$ ist der zweyte gebrochne Factor $=1$; daher wir dem ersten den Namen Binomialcoefficient geben dürfen, wenn gleich bisher von einem Binomio nicht die Frage gewesen ist.

Man setze $m=\mathfrak{A}$; $\frac{m.\,m-1}{1.\ 2}=\mathfrak{B}$; $\frac{m.\,m-1.\,m-2}{1.\ 2.\ 3}=\mathfrak{C}$;

$\frac{m.\,m-1.\,m-2.\,m-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4}=\mathfrak{D}$; u. s. f. *)

Ferner, bezeichne man die Summe aller b, c, d, e, etc. durch $\int.b$; die Summe aller ähnlichen Verbindungen, wie bc, bd, cd, etc durch $\int.bc$; eben so die Summe aller Verbindungen wie bb, oder wie b^2c; durch $\int.bb$; $\int.b^2c$, u. s. f. Wie diese Summen gefunden werden können, ist §. 7. gezeigt worden.

*) Herr Prof. Hindenburg setzt oben linker Hand der Buchstaben 𝔄, 𝔅, ℭ, rc. den Exponenten der Potenz, wozu die dadurch bezeichneten Binomialcoefficienten gehören, und schreibt $^{m}\mathfrak{A}$, $^{m}\mathfrak{B}$. $^{m}\mathfrak{C}$ u. s. w. Zu einer allgemeinen Charakteristik ist dieser Zusatz nothwendig; hier kann er ohne Nachtheil wegbleiben. Unten aber §. 19 wo zwey verschiedene Potenzen mit einander verglichen werden, wird diese Bezeichnung gebraucht. K.

Nach diesen Vorbereitungen erhellet, ohne daß ein Beweis nöthig wäre, mit Zuziehung der Tafel der Zerfällungen §. 12. g) daß

$$(a + b + c + d + e + f + \text{etc})^m = p^m =$$
$$a^m + \mathfrak{A}\, a^{m-1}.\int b$$
$$+ \mathfrak{B}\, a^{m-2}\,(2\int bc + \int bb)$$
$$+ \mathfrak{C}\, a^{m-3}\,(6\int bcd + 3\int b^2c + \int b^3)$$
$$+ \mathfrak{D}\, a^{m-4}\,(24\int bcde + 12\int b^2cd + 6\int b^2c^2 + 4\int b^3c + \int b^4)$$
$$+ \mathfrak{E}\, a^{m-5}\,(120\int bcdef + 60\int b^2cde + 30\int b^2c^2d + 20\int b^3cd + 10\int b^3c^2 + 5\int b^4c + \int b^5)$$
$$+ \mathfrak{F}\, a^{m-6}\,(720\int bcdefg + 360\int b^2cdef + 180\int b^2c^2de + 120\int b^3cde + 90\int b^2c^2d^2 + 60\int b^3c^2d + 30\int b^4cd + 20\int b^3c^3 + 15\int b^4c^2 + 6\int b^5c + \int b^6)$$

+ ꝛc. Die Complexionen jeder Classe sind nach den Potenzen von b und der übrigen Größen geordnet.

Herr Prof. Hindenburg bezeichnet das unbestimmte $(n+1)$te Glied der $m$ten Potenz der Reihe p (das $n$te nach dem ersten a^m) folgendergestalt:

$$p^m \urcorner (n+1) = {}^m\mathfrak{N}\, a^{m-n}\, n'\mathcal{N} \atop (b, c, d, e, f\ldots)$$

Hier bedeuten: p die vieltheilige Größe $a + b + c + d + \text{etc}$; $\urcorner (n+1)$ das $(n+1)$te Glied der danebenstehenden Potenz p^m; ${}^m\mathfrak{N}$ den $n$ten Binomialcoeffi-

g) Die Zahlen der angeführten Zerfällungen (§. 12.) sind hier die Exponenten der zu verbindenden Größen b, c, d, e... nach der Ordnung (§. 13). Man vergleiche (*Infin. Dign.* (*p.* 36; 89—91). Eine Tafel, woraus man diese Repräsentanten aller übrigen Complexionen, mit ihren zugehörigen Polynomialcoefficienten, bis mit der 10ten Dignität (also weiter, als hier im Texte vorkommt) sogleich ausschreiben kann (Ebendas. p. 168, 169). Die dortigen a, b, c, d... sind hier b, c, d, e...   H.

cienten des Exponentens m, $^m\mathfrak{A}$ als den ersten gezählt; $'\mathcal{N}$ die Summe der Verbindungen von n Größen (der nten Classe) aus b, c, d, e ... mit jeder Zahl der Wiederholungen, doch ohne Versetzungen; n die Polynomialcoefficienten oder die Versetzungszahlen für die besondern Gattungen dieser Verbindungen, wo für jede Gattung derselben, n einen besondern Werth hat. Daraus folgen die Glieder von p^m nach der Reihe

$$p^m = a^m + {}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1}\, a'A + {}^m\mathfrak{B}\, a^{m-2}\, b'B + {}^m\mathfrak{C}\, a^{m-3}\, c'C + \text{etc.}$$

Die Verbindungen in den Classen $'A$, $'B$, $'C$ ... $'\mathcal{N}$ nennt Hr. Hindenburg Combinationen an sich (simpliciter) um sie von denen, zu bestimmten Summen (numeri propositi, definitae summae), wie z. B. hier §. 17. am Ende vorkommen, zu unterscheiden. Eine Tafel für $'\mathcal{N}$, und dadurch auch für $'A$, $'B$, $'C$ ... (Infin. Dign. p. 157, 158) wo aber, statt der dortigen a, b, c, d ... hier b, c, d, e ... zu setzen wären.

17. Zweytens sey die nach den Potenzen von z geordnete Reihe

$$a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 + gz^6 + hz^7 + iz^8 + \text{etc} = Z$$

auf die Potenz von dem ganzen positiven Exponenten m zu erheben.

Auf diese Form läßt sich die allgemeinere,

$$az^\mu + bz^{\mu+\nu} + cz^{\mu+2\nu} + dz^{\mu+3\nu} + \text{etc}$$

leicht bringen, wenn man $z^\nu = u$ setzt, wodurch sie wird

$$u^{\mu/\nu}(a + bu + cu^2 + du^3 + \text{etc}).$$

Es sey $Z^m = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + Gz^6 + Hz^7 + Iz^8 + \text{etc}$

und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. behalten die in §. 16. ihnen gegebene Bedeutung.

Die Potenz Z^m besteht aus Partialprodukten, deren jedes, außer einer Potenz z^n, m Factoren aus der Reihe a, b, c, d, e, etc enthält. Es sind so viele Partialprodukte

mit der Potenz z^n vorhanden, als Zerfällungen der Zahl n von 1 bis m Theilen möglich sind (§. 10.). Bezeichnet man jene Größen durch ihre Abstände von a,

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & . \\ a, & b, & c, & d, & e, & f, & g, & \text{etc.} \end{matrix}$$

und setzt in jeder Zerfällung der Zahl n für ihre Theile die zugehörigen Größen mit ihren Potenzen von z, fügt darauf zu jedem Produkte, das mittelst jeder Zerfällung erhalten wird, so viele Factoren a hinzu, als nöthig sind, um dem Coefficienten von z^n die Anzahl von m Factoren zu geben, so erhält man alle Partialprodukte mit der Potenz z^n.

Ein solches Partialprodukt hat die Form $a^{m-r} . b^\beta . c^\gamma . d^\delta . e^\varepsilon \ldots$ wo $\beta + \gamma + \delta + \varepsilon +$ etc $= r$ ist. Multiplicirt man die Exponenten $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, etc, jeden mit dem Abstande der zugehörigen Größe von a, so ist die Summe der Produkte $= n$, z. B. in $a^2 b^4 c^2 d^3 e . z^{21}$.

Jedes Partialprodukt mit bestimmten Factoren kommt so oft vor, als sich die Factoren versetzen lassen, wie in §. 16 erwiesen ist. Es ist also der numerische Coefficient zu dem Literalcoefficienten $a^{m-r} . b^\beta . c^\gamma . d^\delta \ldots =$

$$\frac{m \ldots (m-r+1)}{1 \ldots r} \times \frac{r \ldots\ldots 1}{\beta \ldots 1 \times \gamma \ldots 1 \times \delta \ldots 1 \times \text{etc}}$$

Wenn $\beta + \gamma + \delta +$ etc $= m$ ist, so ist $a^{m-r} = 1$, oder es wird kein a zu dem Literalcoefficienten gesetzt, und der numerische Coefficient oder der Polynomialcoefficient ist $=$

$$\frac{m \ldots\ldots 1}{\beta \ldots 1 \times \gamma \ldots 1 \times \delta \ldots 1}.$$

Es ist also, mit Zuziehung der in §. 12. angewiesenen Zerfällungsarten, am bequemsten der dritten,

$A = a^m$

$B = \mathfrak{A}\, a^{m-1} b$

$C = \mathfrak{A}\, a^{m-1} c + \mathfrak{B}\, a^{m-2} b^2$

$$D = \mathfrak{A}a^{m-1}d + \mathfrak{B}a^{m-2}.\,2bc + \mathfrak{C}a^{m-3}b^3$$

$$E = \mathfrak{A}a^{m-1}e + \mathfrak{B}a^{m-2}(2bd + c^2) + \mathfrak{C}a^{m-3}.\,3b^2e + \mathfrak{D}a^{m-4}b^4$$

$$F = \mathfrak{A}a^{m-1}f + \mathfrak{B}a^{m-2}(2be + 2cd) + \mathfrak{C}a^{m-3}(3b^2d + 3bc^2) + \mathfrak{D}a^{m-4}.\,4b^3c + \mathfrak{E}a^{m-5}b^5$$

$$G = \mathfrak{A}a^{m-1}g + \mathfrak{B}a^{m-2}(2bf + 2ce + dd) + \mathfrak{C}a^{m-3}(3b^2e + 6bcd + c^3) + \mathfrak{D}a^{m-4}(4b^3d + 6b^2c^2) + \mathfrak{E}a^{m-5}.\,5b^4c + \mathfrak{F}a^{m-6}b^6$$

$$H = \mathfrak{A}a^{m-1}h + \mathfrak{B}a^{m-2}(2bg + 2cf + 2de) + \mathfrak{C}a^{m-3}(3b^2f + 6bce + 3bd^2 + 3c^2d) + \mathfrak{D}a^{m-4}(4b^3e + 12b^2cd + 4bc^3) + \mathfrak{E}a^{m-5}(5b^4d + 10b^3c^2) + \mathfrak{F}a^{m-6}.\,6b^5c + \mathfrak{G}a^{m-7}b^7$$

$$I = \mathfrak{A}a^{m-1}i + \mathfrak{B}a^{m-2}(2bh + 2cg + 2df + e^2) + \mathfrak{C}a^{m-3}(3b^2g + 6bcf + 6bde + 3c^2e + 3cd^2) + \mathfrak{D}a^{m-4}(4b^3f + 12b^2ce + 6b^2d^2 + 12bc^2d + c^4) + \mathfrak{E}a^{m-5}(5b^4e + 20b^3cd + 10b^2c^3) + \mathfrak{F}a^{m-6}(6b^5d + 15b^4c^2) + \mathfrak{G}a^{m-7}.\,7b^6c + \mathfrak{H}a^{m-8}b^8$$

u. s. f.

Herr Prof. Hindenburg bezeichnet den Coefficienten der unbestimmten Potenz z^n folgendergestalt:

$$p^m\,\mathfrak{x}(n+1) = {}^m\mathfrak{A}a^{m-1}\,\mathfrak{a}\,{}^nA + {}^m\mathfrak{B}a^{m-2}\,\mathfrak{b}\,{}^nB + {}^m\mathfrak{C}a^{m-3}\,\mathfrak{c}\,{}^nC \ldots + {}^m\mathfrak{N}a^{m-n}\,\mathfrak{n}\,{}^n\mathcal{N}$$

$$\begin{pmatrix} b, & c, & d, & e, & f & \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5 & \ldots \end{pmatrix}$$

wo p die vieltheilige Größe Z ist; $\mathfrak{x}(n+1)$ der Coefficient des $(n+1)$ten Gliedes der mten Potenz, a^m als das erste gezählt; ${}^m\mathfrak{A}$, ${}^m\mathfrak{B}$, ${}^m\mathfrak{C}$ ... ${}^m\mathfrak{N}$, die Binomialcoefficienten zu der mten Potenz; ${}^nA$, ${}^nB$, ${}^nC$, ... ${}^n\mathcal{N}$ die Verbindungen nach Classen von einer, zwey, drey ... nGrößen b, c, d, etc. deren Abstände von a, die der Zeiger

$\left(\begin{matrix} b, c, d, e, f \ldots \\ 1, 2, 3, 4, 5 \ldots \end{matrix}\right)$ nachweiset, die Summe n geben, und unter welchen auch gleiche vorhanden seyn können; $a, b, c \ldots n$, die Polynomialcoefficienten oder die Versetzungszahlen, womit jede Gattung von Verbindung zu begleiten ist.

Daraus folgt, für jeden Werth des Exponenten m (Nov. Syst. Perm. p. LIV, 7)

$$p^m = a^m + {}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1}\, a^1 A z^1 + ({}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1}\, a^2 A + {}^m\mathfrak{B}\, a^{m-2}\, b^2 B)\, z^2 + \text{etc}$$
$$\left(\begin{matrix} b, c, d, e, f \ldots \\ 1, 2, 3, 4, 5 \ldots \end{matrix}\right)$$

Wenn m eine ganze positive Zahl ist, so kann man für den Werth von p^m auch den verkürzten Ausdruck durch einzelne Classen, nicht durch Summen von Classen, schreiben (Nov. Syst. p. LIV, 8.).

18. Der Quotient $\dfrac{(a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{etc})^p}{(a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{etc})^q}$, für welchen p und q ganze positive Zahlen bedeuten, läßt sich auf gedoppelte Art finden, wenn $p > q$ ist; erstlich, durch unsern polynomischen Lehrsatz; zweytens, durch die wirkliche Division. Der Quotient sey

$$= A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \text{etc.}$$

und $(a + bz + cz^2 + \text{etc})^q = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \text{etc.}$
und $(a + bz + cz^2 + \text{etc})^p = \alpha' + \beta' z^2 + \gamma' z^3 + \text{etc.}$
wo α, β, γ, etc. und α', β', γ', etc durch den polynomischen Lehrsatz bestimmt werden. Multiplicirt man $A + Bz + \text{etc}$, mit $\alpha + \beta z + \text{etc}$, so ist das entwickelte Produkt mit $\alpha' + \beta' z + \text{etc}$ eine identische Funktion, weil z von den gegebenen Größen ganz unabhängig seyn soll. Daher sind die Coefficienten zu derselben Potenz von z beiderseits gleich. Das Produkt ist

$$\begin{matrix} A\alpha & + B\alpha . z & + C\alpha . z^2 & + D\alpha . z^3 & + \text{etc} \\ & + A\beta \,. & + B\beta \,. & + C\beta \,. & \\ & & + A\gamma \,. & + B\gamma \,. & \\ & & & + A\delta \,. & \\ = \alpha' & + \beta' z & + \gamma' z^2 & + \delta' z^3 & + \text{etc.} \end{matrix}$$

Es werden demnach die Coefficienten A, B, C, D, etc. aus den Coefficienten α, β, γ, etc und α', β', γ', etc, folglich auch aus a, b, c, etc. und aus p nebst q allgemein bestimmt [h]). Hiebey ist das Verhältniß zwischen p und q gleichgültig, da die allgemeine Division, so wie andere analytische Operationen, blos die Form des Quotienten geben. Da nun in dem Falle, daß $p > q$ ist, der Quotient durch den polynomischen Lehrsatz bekannt ist, so gilt eben der Quotient, wenn $p < q$ ist, oder für $(a + bz + \text{etc.})^{-(q-p)}$, und die Form für $(a + bz + \text{etc})^{+m}$ ist einerley mit der Form für $(a + bz + \text{etc})^{-m}$.

19. Es sey $(a + bz + cz^2 + dz^3 \text{etc.})^m = (\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \text{etc.})^n$, so lassen sich die Coefficienten α, β, γ ... aus a, b, c ... und diese aus jenen bestimmen. Denn man bezeichne die Binomial-Coefficienten in der mten Potenz durch ${}^m\mathfrak{A}$, ${}^m\mathfrak{B}$, ${}^m\mathfrak{C}$; ꝛc. und die in der nten Potenz durch ${}^n\mathfrak{A}$, ${}^n\mathfrak{B}$, ${}^n\mathfrak{C}$; ꝛc. so ist;

$$a^m = \alpha^n.$$

$${}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1} b = {}^n\mathfrak{A}\, \alpha^{n-1} \beta.$$

$${}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1} c + {}^m\mathfrak{B}\, a^{m-2} b^2 = {}^n\mathfrak{A}\, \alpha^{n-1} \gamma + {}^n\mathfrak{B}\, \alpha^{n-2} \beta^2.$$

$${}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1} d + {}^m\mathfrak{B}\, a^{m-2}.2bc + {}^m\mathfrak{C}\, a^{m-3} b^3$$

$$= {}^n\mathfrak{A}\, \alpha^{n-1} \delta + {}^n\mathfrak{B}\, \alpha^{n-2}.2\beta\gamma + {}^n\mathfrak{C}\, \alpha^{n-3} \beta^3 ..$$

u. s. f. Jeder Coefficient aus der einen oder der andern Wurzel kommt in diesen Gleichungen, wo er zuerst eintritt, in der ersten Potenz vor, und hat daher einen einfachen, immer möglichen Werth. Die Formen der α, β, γ, δ ... sind dieselben mit den Formen der a, b, c, d ... das heißt, jene werden aus a, b c ... und dem Exponenten m, auf eine ähnliche Art bestimmt,

h) Die Coefficienten A, B, C, D ... eines solchen Quotienten (was auch p und q seyn mögen) allgemein zu bestimmen, dient meine Lokalformel für Potenzen gebrochener Funktionen (Arch. der Math. H. II. S. 227, 8). Bestimmte Fälle, für $p = q = 1$, auch für $p = 0$, in meiner Tafel: *Serierum per Series divisio* (Nov. Syst. Perm. p. LXXVII. seq.) H.

als wie a, b, c ... aus α, β, γ ... und dem Exponenten n. Also hat $(a + bz + cz^2 + \text{ꝛc.})^{m/n}$ einerley Form mit $(a + bz + cz^2 + \text{ꝛc.})^{n/m}$, folglich auch $(a + bz + cz^2 + \text{ꝛc.})^m$ einerley Form mit $(a + bz + cz^2 + \text{ꝛc.})^{1/m}$, das heißt, beyde Größen sind nur darin verschieden, daß m und $\frac{1}{m}$ in ihnen vertauscht sind. Wenn nun Größen von einerley Form auf dieselbe Potenz mit einem ganzen Exponenten erhoben werden, so ist die Form der Potenz dieselbe, indem die allgemeine Multiplikation die Größe unbestimmt läßt, und nur die Form des Produkts aus den Formen der Faktoren darstellt. Folglich ist, wenn p eine ganze Zahl bedeutet, die Form von $(a + bz + cz^2 + \text{ꝛc.})^{pm}$ einerley mit der Form von $(a + bz + cz^2 + \text{ꝛc.})^{p/m}$. Jene Form ist wieder einerley mit der von $(a + bz + cz^2 + \text{ꝛc.})^r$, wenn r irgend eine ganze Zahl ist. Demnach ist die Form von $(a + bz + \text{ꝛc.})^r$ einerley mit der von $(a + bz + \text{ꝛc.})^{p/m}$.

Der polynomische Lehrsatz nach der zweyten Form gilt also auch für **positive gebrochene Exponenten.**

Oder: die Zerfällung in gleiche Faktoren hat einerley Form mit der Zusammensetzung aus gleichen Faktoren, eben so wie eine mit Zusammensetzung verbundene Zerlegung.

20. Der Quotient $\frac{1}{(a + bz + cz^2 + \text{ꝛc.})^m}$ hat einerley Form mit der Potenz $(a + bz + cz^2 + \text{ꝛc.})^m$ nach §. 18. Nun kann m auch ein Bruch seyn, ohne daß sich die Form der Potenz ändert. Die Division stellt allgemein, bloß die Form ohne bestimmte Größe dar. Da nun die Form des Divisors in $\frac{1}{(a + bz + \text{ꝛc.})^m}$ bleibt, es mag m eine ganze oder gebrochene positive Zahl bedeuten, so behält der Quo-

tient seine Form, und es hat $(a + bz + \text{ꝛc.})^m$ einerley Form mit $(a + bz + \text{ꝛc.})^{m/n}$.

Der polynomische Lehrsatz nach der zweyten Form gilt also auch für verneinte Exponenten, ganze und gebrochene.

21. Da der polynomische Lehrsatz für eine nach den Potenzen einer Größe z geordnete Reihe allgemein gilt, die Beschaffenheit des Exponenten der Potenz mag seyn, welche sie wolle, so gilt auch die erste Form für alle Arten von Exponenten, indem man in der zweyten Form nur $z = 1$ zu setzen hat, um die erste Form zu erhalten, in welcher aber noch die Partialprodukte nach den Potenzen von a zu ordnen sind.

22. Der binomische Lehrsatz ist nach der hier gebrauchten Methode ein Corollarium des polynomischen. Will man den binomischen Lehrsatz unmittelbar aus der Natur der Multiplikation, mit Zuziehung der Sätze von den Combinationen herleiten, so wird dieses auf keine Art geschehen können, die man nicht auch für den polynomischen Lehrsatz gebrauchen könnte [i]. Daher wird jener immer als ein besonderer Fall in diesem enthalten seyn. Für Anfänger ist es aber gut, den binomischen Lehrsatz in seiner Allgemeinheit, nach dem hier angewandten Verfahren zu beweisen, und sie dadurch auf den,

i) Sehr wahr; denn für die combinatorische Zeichnung und Entwickelung hat es keinen Anstoß, und ist ganz gleichgültig, ob man statt der Funktion φx und ihrer Potenzen $\varphi^2 x$, $\varphi^3 x$ u. s. w. die einfache Größe bx oder die Reihe $bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}$ und ihre Potenzen setzt (*Nov. Syst. Perm.* p. LIV, 8. und *Infin. Dign.* p. 98, 101); und so läßt sich nichts für $(a + \varphi x)^m$ in der einen Bedeutung von φx erweisen, was nicht zugleich auf die andere geradezu paßte und anwendbar wäre. Die Allgemeinheit des polynomischen Lehrsatzes darzuthun, hat also nicht mehr Schwierigkeit, als die des binomischen; und man kann nun, wie man will, den letzten, wie hier geschehen, von dem ersten ableiten, oder umgekehrt, nach dem gewöhnlichen Herkommen, jenen auf diesen beziehen. H.

nur wegen der weitläufigern Rechnung schwerern, polynomischen Lehrsatz vorzubereiten.

23. Die dritte Form des polynomischen Lehrsatzes, in welcher die Coefficienten von z, jeder durch alle vorhergehenden bestimmt werden, ist durch ihre faßliche Regelmäßigkeit merkwürdig. Sie kann auch zur numerischen Berechnung der Coefficienten sehr nützlich seyn, da gewöhnlich diese nach der Reihe gesucht werden. Diese Form zu finden, sehe man z als eine veränderliche Größe an, und suche Gleichungen zwischen den Veränderungen der Größe z, der vieltheiligen Größe und der Potenz derselben. Da die Form der Coefficienten bey der Veränderung von z bleibt, so wird dieses auf eine Bestimmung der Coefficienten führen.

24. Es sey:

$$a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + \text{etc} = p$$
$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{etc} = p^m = P$$

die zusammen gehörigen Veränderungen von z, p, P, seyn Δz, Δp, ΔP. In dem Werthe von Δp bezeichne man alles, was das Quadrat von Δz und höhere Potenzen enthält, durch $q\Delta z^2$, eben dieses in ΔP durch $Q\Delta z^2$. Solchergestalt ist

$$\Delta p = b\Delta z + 2cz\Delta z + 3dz^2\Delta z + 4ez^3\Delta z + \text{etc} \\ + q\Delta z^2;$$

$$\Delta P = B\Delta z + 2Cz\Delta z + 3Dz^2\Delta z + 4Ez^3\Delta z + \text{etc} \\ + Q\Delta z^2.$$

Weil $(p+\Delta p)^m = P + \Delta P$, so ist

$$mp^{m-1}\Delta p + \frac{m.m-1}{1.2}p^{m-2}\Delta p^2 + \text{etc} = \Delta P, \text{ oder}$$

$$mp^{m-1} + \frac{m.m-1}{1.2}p^{m-2}\Delta p + \text{etc} = \frac{\Delta P}{\Delta p};$$

also $m p^{m-1} + \frac{m.m-1}{1.\ 2} p^{m-2} \Delta p + \text{etc} = \frac{B + 2Cz + \text{etc} + Q\Delta z}{b + 2cz + \text{etc} + q\Delta z}$

Weil der Werth von Δz und der daraus fließende von Δp ganz willkührlich sind, und gar nicht von den Größen a, b, c, etc und A, B, C, etc abhangen, so müssen in der gefundenen Gleichung, nachdem sie mit dem Nenner des Bruches rechter Hand multiplicirt ist, die Theile, welche kein Δz und Δp enthalten, von denen ganz unabhängig seyn, die diese Veränderungen enthalten. Jene machen eine besondere Gleichung aus, so wie diese, und die Gleichung zwischen den letztern zerfällt für jede Potenz von Δz in besondere Gleichungen, da die Größe von Δz ganz willkührlich ist; und von den unveränderlichen Größen nicht abhängt.

Demnach ist

$$m p^{m-1} = \frac{B + 2Cz + 3Dz^2 + \text{etc}}{b + 2cz + 3dz^2 + \text{etc}}$$

also

$$m(A + Bz + Cz^2 + \text{etc.})\quad(b + 2cz + 3dz^2 + \text{etc})$$
$$= (a + bz + cz^2 + \text{etc.})\ (B + 2Cz + 3Dz^2 + \text{etc}).$$

Weil z von den Größen a, b, c, etc und A, B, C, etc ganz unabhängig ist, so muß alles, was in dieselbe Potenz von z multiplicirt ist, eine besondere Gleichung ausmachen, dadurch erhält man die Gleichungen zur Bestimmung von B, C, D, etc aus a, b, c, etc oder auch dieser aus jenen. Der erste Theil der Potenz ist $A = a^m$.

Die Gleichungen sind:

I. $mAb = aB.$

II. $m(2Ac + Bb) = 2aC + bB.$

III. $m(3Ad + 2Bc + Cb) = 3aD + 2bC + cB.$

IV. $m(4Ae + 3Bd + 2Cc + Db) = 4aE + 3bD + 2cC + dB.$

u. s. f. Daraus folgt

$aB = mbA$
$2aC = 2mcA + (m-1)bB.$
$3aD = 3mdA + (2m-1)cB + (m-2)bC.$
$4aE = 4meA + (3m-1)dB + (2m-2)cC + (m-3)bD.$

u. s. f.

Das Gesetz der Formation ist so deutlich und offenbar, daß es kaum eines allgemeinen Beweises für einen unbestimmten Coefficienten bedarf.

Die Beschaffenheit des Exponenten m mag in dieser Form des polynomischen Lehrsatzes seyn, welche man will. Denn es ist hier nur nöthig, die beiden ersten Glieder einer Potenz $(\alpha+\beta z)^m$ zu haben, und es läßt sich leicht zeigen, daß diese sind $\alpha^m + m\alpha^{m-1}\beta z$.

25. Wenn Δz und Δp in der gefundenen Gleichung $=0$ gesetzt wären, so würde dieselbe Gleichung zwischen a, b, c, etc und A, B, C, etc entstehen. Allein dieses Verfahren macht Undeutlichkeit, da es der anfänglichen Annahme, daß z sich verändern soll, widerspricht. In der That werden auch Δz und Δp nicht $=0$ gesetzt, sondern es ist der Theil der Gleichung, worin sie enthalten sind, ein Aggregat von besondern Gleichungen. Wenn durch die Differentialrechnung die Gränze des Quotienten $\frac{\Delta P}{\Delta p}$, oder des Verhältnisses $\Delta P : \Delta p$ gesetzt wird, so werden Δp und Δz als verschwindend behandelt.

26. Man sieht aus dem hier angewandten Verfahren, daß die involutorische Form des polynomischen Lehrsatzes, nicht sowohl der Differentialrechnung als der Analysis des Endlichen zugehört, welche auch die Veränderungen von z und p endlich seyn läßt, nur daß sie dieselben zu dem gegenwärtigen Zwecke nicht sucht, selbst nicht ihre Gränzverhältniß braucht. Sie führt sie nur ein, um sie

wieder abzusondern, und dasjenige von der Gleichung zwischen der Wurzel und Potenz zu behalten, was von den Veränderungen unabhängig ist. Die Differentialrechnung dient hier nur zur Bequemlichkeit. Die Gränzen der Verhältnisse zu bestimmen, oder anzugeben, wie fern die Verhältnisse der Veränderungen unabhängig sind; das ist der Zweck der Differentialrechnung. Hier ist es nur Mittel, um zu der Bestimmung der Relation zwischen den Coefficienten zweyer Reihen zu gelangen. Wäre kein anderer Weg, die involutorische Form zu finden und allgemein zu beweisen, als durch die Differentialrechnung, so wäre die Analysis des Endlichen kein für sich bestehendes Ganze, und man müßte, um nicht in den Untersuchungen aufgehalten zu werden, einen Theil der Differentialrechnung einschieben.

27. Die Herleitung der zweyten Form aus der ersten, der combinatorischen, ist beschwerlich. Inzwischen wird es wenigstens zur Uebung gut seyn, auch diesen Weg zu versuchen. Man setze in §. 17., der Bequemlichkeit wegen, $a = 1$, so ist für

$$(1 + az + bz^2 + \text{etc})^m = A + Bz + Cz^2 + \text{etc.}$$

$$A = 1; \quad B = \mathfrak{A}b;$$

$$C = \mathfrak{A}c + \mathfrak{B}b^2; \quad D = \mathfrak{A}d + \mathfrak{B}.2bc + \mathfrak{C}b^3;$$

$$E = \mathfrak{A}e + \mathfrak{B}(2bd + c^2) + \mathfrak{C}.3b^2c + \mathfrak{D}b^4;$$

$$F = \mathfrak{A}f + \mathfrak{B}(2be + 2cd) + \mathfrak{C}(3b^2d + 3bc^2) + \mathfrak{D}.4b^3c + \mathfrak{E}b^5.$$

u. s. f. Um die Form der Coefficienten, wenn sie durch die vorhergehenden dargestellt werden, zu finden, drücke man die Binomialcoefficienten jeden durch den nächst vorhergehenden aus. Nehmen wir den Coefficienten F, um an demselben die gesuchte Form darzustellen, so ist solchergestalt

$$5F = 5mf + 5(m-1)\mathfrak{A}(be+cd) + 5(m-2)\mathfrak{B}(b^2d+bc^2) + 5(m-3)\mathfrak{C}b^3c + (m-4)\mathfrak{D}b^5.$$

Nun ist $(m-4)bE = (m-4)\mathfrak{A}be + (m-4)\mathfrak{B}(2b^2d + bc^2)$
$+ 3(m-4)\mathfrak{C}b^3c + (m-4)\mathfrak{D}b^5$.

also $5F - (m-4)bE = 5mf + (4m-1)\mathfrak{A}be + (5m-5)\mathfrak{A}cd$
$+ (3m-2)\mathfrak{B}b^2d + (4m-6)\mathfrak{B}bc^2$
$+ (2m-3)\mathfrak{C}b^3c$.

Ferner $(2m-3)cD = (2m-3)\mathfrak{A}cd + (4m-6)\mathfrak{B}bc^2$
$+ (2m-3)\mathfrak{C}b^3c$,

und $5F - (m-4)bE - (2m-3)cD =$
$5mf + (4m-1)\mathfrak{A}be + (3m-2)\mathfrak{A}cd + (3m-2)\mathfrak{B}b^2d$,

d. i. $5F = 5mfA + (4m-1)eB + (3m-2)dC$
$+ (2m-3)cD + (m-4)bE$.

Da die Coefficienten A, B, C, D, etc nach einem bestimmten Gesetze aus a, b, c, d, etc und dem Exponenten der Potenz m gebildet werden, so muß auch ein Gesetz der Herleitung unter ihnen selbst Statt finden. Dieses Gesetz zeigt sich an dem gefundenen Coefficienten F ganz offenbar, ohne Unbestimmtheit und Vieldeutigkeit. Es muß daher allgemein seyn [k]).

28. Die combinatorische Form des polynomischen Lehrsatzes läßt sich auch aus der Vergleichung der höhern Unterschiede der Wurzel und ihrer Potenz herleiten, aber nicht so einleuchtend, wie unmittelbar durch die Combinationen.

Es sey

$$x = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \text{etc}$$

$$y = x^m = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{etc.}$$

k) Einen strengen Beweis dieser Allgemeinheit hat bekanntermaßen, jedoch mit Beyhülfe der Differentialrechnung, Herr Hofrath Kästner (Anal. des Unendl. §. 56) gegeben. Herr Magister Rothe hat die involutorische Eulerisch-Kästnerische Formel für diesen Coefficienten aus einem noch allgemeinern Satze, als ein Corallarium, abgeleitet (*Ser. Invers. Dem. univers.* §. III. Cor. I. p. 4.). Dieser Lokalsatz, zu dessen Erweis Herr R. sich der Differentialen in seiner Dissertation bedient hatte, ist nachher von ihm auf ganz einfache rein combinatorische Gründe zurückgeführt und gestützt worden. H.

Man setze für z die Glieder einer arithmeti[sch]en Reihe, deren Unterschiede Δz sind. Das zu einem Gl[iede] dieser Reihe, z^I, gehörige x^I setze man zusammen [aus] dem zu dem Anfangsgliede z gehörigen x und den [An]fangsgliedern der Unterschiede der verschiedenen Ordn[un]gen Δx, $\Delta^2 x$, $\Delta^3 x$, u. s. f. Eben so das zu z^I gehö[rige] y^I aus Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, u. s. f. Nun ist $\frac{\Delta^n x}{\Delta z^n}$ eine Fu[nk]tion von z und Δz, die wir durch $Fz + f(z, \Delta z)$ beze[ich]nen wollen, so daß $f(z, \Delta z)$ alle Theile enthalte, wor[in] Δz vorkommt. Gleichfalls ist $\frac{\Delta^n y}{\Delta z^n}$ eine ähnliche Fu[nk]tion von z und Δz, die durch $F^I z + f^I(z, \Delta z)$ bezeich[net] werde. Solchergestalt ist $\frac{\Delta^n y}{\Delta^n x} = \frac{F^I z + f^I(z, \Delta z)}{Fz + f(z, \Delta z)}$

Da $y = x^m$ ist, so ist $\Delta y = (m x^{m-1} + q \Delta x) \Delta x$, wo [q] eine Funktion von m, x und Δx ist. Damit man diese[n] Unterschied und die folgenden höhern mit den vorher aus dem Werthe von y, so fern es eine Funktion von z ist, hergeleiteten Werthen der Unterschiede vergleichen könne, drücke man x und Δx durch z und Δz aus, und setze $\Delta y = (\varphi(m, z) + \varphi^I(m, z, \Delta z)) \Delta x$. Daraus wird $\Delta^2 y = (\varphi(m, z) + \varphi^I(m, z, \Delta z)) \Delta^2 x + (\psi(m. z) + \psi^I(m, z, \Delta z)) \Delta x$, wo ψ und ψ^I Funktionen wie φ und φ^I anzeigen. Auf dieselbe Art wird $\Delta^3 y$ zusammengesetzt aus $\Delta^3 x$, $\Delta^2 x$, Δx, jedes in eine Funktion von m, z und Δz multiplicirt, und $\Delta^n y$ aus $\Delta^n x$, $\Delta^{n-1} x \ldots \Delta x$, in Funktionen von m, z, Δz multiplicirt. Da die Unterschiedsglieder $\Delta^{n-1} x$, $\Delta^{n-2} x$, etc. durch Δz^{n-1}, Δz^{n-2}, etc und durch Funktionen von z und Δz aus der Reihe für x gegeben sind, so erhalten wir noch einen Werth für $\frac{\Delta^n y}{\Delta^n x}$, welcher eine Funktion von z und Δz nebst dem Exponenten m ist. Diesen Werth be-

zeichne man durch $\frac{\Delta^n y}{\Delta^n x} = \varphi(m, z) + \varphi'(m, z, \Delta z)$

Folglich ist $\frac{F'z + f'(z, \Delta z)}{Fz + f(z, \Delta z)} = \varphi(m, z) + \varphi'(m, z, \Delta z)$.

Da die Größe z und der Unterschied Δz jeden willkührlichen Werth haben können, so hängen sie von den Coefficienten a, b, c, etc und A, B, C, etc auf keine Weise ab. Es muß sich also in der jetzt gefundenen Gleichung alles aufheben, was z und Δz enthält. Daher fallen die Functionen $f(z, \Delta z)$; $f'(z, \Delta z)$; $\varphi'(m, z, \Delta z)$; weg, und in den Functionen Fz; $F'z$; $\varphi(m, z)$, sind bloß die unveränderlichen Größen zu behalten. Man setzt hier z und Δz nicht $= 0$, als welches mit den gemachten Annahmen streiten würde; sondern man behandelt sie nur wie Null, weil die Größen, welche in sie multiplicirt sind, sich aufheben. Demnach darf man die endlichen Unterschiede hier wie Differentiale behandeln, und hat in den Differentialquotienten $z = 0$, also $x = \alpha$ zu setzen.

29. Man setze in dem Differentialquotienten $\frac{d^n x}{dz^n}$ den Werth von $z = 0$, so erhält man für Fz folgende Werthe nach der Reihe

$$\frac{dx}{dz} = \beta \quad ; \quad \frac{d^2x}{dz^2} = 1.\,2.\,\gamma\,;$$

$$\frac{d^3x}{dz^3} = 1,\,2.\,3.\,\delta\,; \quad \frac{d^4x}{dz^4} = 1.\,2.\,3.\,4.\,\varepsilon\,;$$

u. s. f. Eben so verfahre man mit dem Differentialquotienten $\frac{d^n y}{dz^n}$, so erhält man die Werthe von $F'z$, nämlich

$$\frac{dy}{dz} = B \quad ; \quad \frac{d^2 y}{dz^2} = 1,\,2,\,C\,;$$

$\frac{d^3 y}{d z^3} = 1.2.3.D$; $\frac{d^4 y}{d z^4} = 1.2.3.4.E$

u. s. f. Daraus wird

$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{\beta}$; $\frac{d^2 y}{d^2 x} = \frac{C}{\gamma}$;

$\frac{d^3 y}{d^3 x} = \frac{D}{\delta}$; $\frac{d^4 y}{d^4 x} = \frac{E}{e}$;

u. s. f. Aus der Gleichung $y = x^m$ folgt:

$dy = m x^{m-1} dx = \mathfrak{A} x^{m-1} dx$;

$d^2 y = 1.2.\mathfrak{B} x^{m-2} dx^2 + \mathfrak{A} x^{m-1} d^2 x$;

$d^3 y = 1.2.3.\mathfrak{C} x^{m-3} dx^3 + 1.2.3.\mathfrak{B} x^{m-2} dx d^2 x + \mathfrak{A} x^{m-1} d^3 x$;

$d^4 y = 1.2.3.4.\mathfrak{D} x^{m-4} dx^4 + 1.2.3.6.\mathfrak{C} x^{m-3} dx^2 d^2 x + 1.2.\mathfrak{B} x^{m-2} (3 (d^2 x)^2 + 4 dx d^3 x) + \mathfrak{A} x^{m-1} d^4 x$;

u. s. f. Die Werthe von $\frac{d^n y}{d^n x}$ aus diesen Gleichungen sind die in (28) durch $\phi (m, z)$ bezeichneten Functionen; nur ist x nicht durch z dargestellt, weil es hier nicht nöthig war. Die Differentialquotienten in denselben sind die vorher gefundenen, oder werden aus ihnen unmittelbar hergeleitet. Am bequemsten werden alle Differentiale durch dz^n ausgedrückt, worauf mit dz^n durchaus dividirt wird. Setzt man nun, wie in (28) vorgeschrieben ward, $x = \alpha$, so ergeben sich die Werthe von B, C, etc. Der Werth von A folgt daher, daß für $z = 0$, $A = \alpha^m$ ist. Es ist also

$A = \alpha^m$.

$B = \mathfrak{A} \alpha^{m-1} \beta$.

$C = \mathfrak{A} \alpha^{m-1} \gamma + \mathfrak{B} \alpha^{m-2} \beta^2$.

$D = \mathfrak{A} \alpha^{m-1} \delta + \mathfrak{B} \alpha^{m-2} . 2 \beta \gamma + \mathfrak{C} \alpha^{m-3} \beta^3$.

$E = \mathfrak{A} \alpha^{m-1} \varepsilon + \mathfrak{B} \alpha^{m-2} (2 \beta \delta + \gamma^2) + \mathfrak{C} \alpha^{m-3} . 3 \beta^2 \gamma + \mathfrak{D} \alpha^{m-4} \beta^4$.

u. s. f. Das Gesetz der Formation ist hier schon etwas schwerer zu entdecken, und nicht wohl allgemein zu bewei-

sen. Uebrigens gelten diese Werthe für jede Beschaffenheit des Exponenten m, weil hier nur die beiden ersten Glieder der Potenz eines Binomium gebraucht werden.

Colson hat sich auch der höhern Differentiale bedient, aber auf eine andere Art, da er Integrationen gebraucht, wodurch die Sache erschwert wird. Auch hat er nicht erklärt, warum es erlaubt sey, $z = 0$ zu setzen. Hr. Prof. Hindenburg zeigt (*Infin. dign. p.* 56, 57.) nachdem er Colsons Methode vorgetragen hat, wie man hier bequemer den Taylorschen Lehrsatz anwenden könne. Nach meinem Verfahren ist auch dieser nicht nöthig. l)

30. Für irrationale Exponenten einer Potenz gelten der binomische und polynomische Lehrsatz eben so gut als für rationale, da irrationale Größen Gränzen sind, welchen sich rationale Größen von beiden Seiten ohne Ende nähern, daher was von diesen letztern wahr ist, auch von ihrer Gränze gilt.

31. Wenn der Exponent einer Potenz als eine veränderliche Größe betrachtet wird, so hat dieses

l) Taylor's Theorem ist hier in so fern bequem, weil es die Differenzialen schon so angeordnet enthält, wie sie, durch eine leichte Veränderung, den gesuchten Satz geben. Von dieser Anwendung und ihren Gründen, besonders warum hier z (dort x) = 0 zu setzen, meine Abhandlung über Taylor's Satz, seine verschiedenen Formen und Erweiterung (Arch. der Math. Heft II. S. 210, 211). Die Anwendung auf den Satz selbst (S. 212). Bernoulli's, Colson's, Taylor's u. a. Verfahren, und eben so auch die von mir (S. 208.) aus Taylor's Satze abgeleitete Formel, in welcher Combinationsclassen mit höhern Differentialen vermengt vorkommen, führen sämtlich auf Ausdrücke (*Infin. Dign.* p. 52. 55. 57. 67.) solcher Art, wie oben im Texte für A, B, C ... stehen. Diese Ausdrücke nun, und das Bestreben, das, selbst nach Hrn. Klügels und Kästners Urtheile (An. des Unendl. §. 56, xiv.) so schwierige Gesetz ihrer Formation zu entdecken und allgemein zu beweisen, leiteten mich endlich auf den merkwürdigen Lokalsatz (*Infin. Dign.* p. 71 und hier S. 13 Note k) und dieser weiter auf Combinationsverfahren. Dieser Satz enthält die combinatorische Form des polynomischen Lehrsatzes eben so, wie der Kästnerische die involutorische. H.

auf die Form der entwickelten Potenz keinen Einfluß, da die Form von der Größe der Bestandtheile unabhängig ist. Es wird alsdann die Potenz als eine Function des Exponenten angesehen, und ist ein Glied einer geometrischen Reihe, dessen Stelle durch den Exponenten angegeben wird.

32. Mehr Anstoß kann die Frage veranlassen, ob man für den binomischen und polynomischen Lehrsatz auch **unmögliche Exponenten** zulassen dürfe. Ueberhaupt kann man zwar der unmöglichen Größen sich überheben; inzwischen sind sie brauchbar, um den Lehrsätzen der Analysis die möglichste Allgemeinheit zu verschaffen, zuweilen auch, um Rechnungen abzukürzen. Unmögliche Größen dienen, um eine Verwandlung einer Größe, die unter gewissen Umständen unmöglich ist, in bloßen Grössenzeichen auszuführen, wofern man nur eine unmögliche Einheit, nämlich $\sqrt{-1}$, annimmt. Z. B. die Größe $aa + bb$ ist nicht in zwey mögliche Factoren zerlegbar, wie $aa - bb$, aber doch in die unmöglichen $a + b\sqrt{-1}$ und $a - b\sqrt{-1}$. Durch den Gebrauch der unmöglichen Größen erhalten Kreisbogen und Exponentialgrößen einerley Form. Es läßt sich nämlich durch Hülfe des binomischen Lehrsatzes, ohne Differentialrechnung, zeigen, daß

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen ist. Ist e eine andere Zahl als diese Basis, so hat man nur statt x zu setzen den Quotienten von x durch den Modulus des Systems. Daher ist

$$e^{x} + e^{-x} = 2\left(1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1\ldots4} + \text{etc.}\right);$$

$$e^x - e^{-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{1.2} + \frac{x^5}{1\ldots5} + \text{etc.}\right).$$

Setzt man $x\sqrt{-1}$ statt x, so ist

$$e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}} = 2\left(1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1..4} - \text{etc.}\right)$$
$$= 2 \cos \text{Arc.}\, x;$$

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}} = 2\left(x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1..5} - \text{etc.}\right)$$
$$= 2 \sin \text{Arc.}\, x.$$

Zerlegt man e in die willkührlichen Theile $1 + a + b + c + \text{etc}$, so müssen die Potenzen $(1 + a + b + \text{etc})^x$ und $(1 + a + b + \text{etc})^{-x}$ dieselbe Form haben, es mag x sich auf eine mögliche oder auf eine unmögliche Einheit beziehen, weil die Summe und Differenz $e^x \pm e^{-x}$ dieselbe Form behalten, es mag die mögliche oder die unmögliche Einheit angenommen werden.

33. Zum Schlusse will ich noch einige Zusätze zu der Hauptschrift in dieser Materie, der schon einigemahl angeführten Hindenburgischen Abhandlung: Infinitinomii dignitatum historia, leges et formulae, machen.

I. Es ist in derselben die von Herrn von Tempelhoff, in seinen Anfangsgründen der Analysis endlicher Größen (S. 352—363.) gebrauchte Methode übergangen worden. Dieser vortreffliche Mathematiker verbindet den binomischen und polynomischen Lehrsatz mit der Lehre von den Gleichungen. Nachdem er die Form des Produkts aus Factoren, wie $x + a$; $x + b$; etc entwickelt, und es als eine Gleichung dargestellt hat, setzt er (§. 532.) die Factoren alle gleich, so daß die Gleichung lauter gleiche Wurzeln hat. Dieses giebt zugleich eine Potenz einer zweytheiligen Größe mit einem ganzen bejahten Exponenten (§. 533.). Hieraus ergiebt sich die Potenz einer

vieltheiligen Größe mit einem solchen Exponenten (§. 535.) und zwar in der involutorischen Form der Coefficienten. Die Methode ist im Wesentlichen dieselbe mit der von mir in (24) gebrauchten, nur daß die Rechnung etwas weitläufiger ist, und daß die Veränderung von z (das. S. 355.) gerade zu = 0 gesetzt wird. Dieses kann einen Anstoß geben, weil vorher angenommen ward, z (oder dort x) solle um eine endliche Größe Δz (dort y) zunehmen. m) Oder die Methode kommt auf Differenzialrech-

m) Herr von Tempelhoff kommt (Anfangsgr. der Anal. des Unendl. §. 427—429.) noch einmal auf den binomischen Lehrsatz zurück, den er von einem noch allgemeinern Productensatze (§. 425.) ableitet, auf welchen schon vorher Th. Simpson (*Phil. Transf. Vol.* XLVII. p. 20—27.) verfallen war. Auf diesen, aber noch viel weiter erstreckten, Produktensatz hat ganz neuerlich Herr von Prasse die Kräfte der combinatorischen Analysis mit vielem Glücke versucht (Vsus Logarithmorum in Theoria Aequationum. Lipsiae 1796). Der Simpson-Tempelhofische Satz (in der erweiterten Form) kommt daselbst §. XXVII. u. f. vor, und man wird auch hier die Vorzüge des combinatorisch-analytischen Verfahrens vor dem gewöhnlichen mit Vergnügen bemerken, indem hier die Resultate der verwickeltern Form sich weit geschwinder ergeben, als jene der viel einfachern nach der Simpsonischen Analysis.

Hierher gehört auch der Segnerische allgemeine Beweis des binomischen Lehrsatzes (*Nouv. Mém. de l'Ac. Roy de Berlin Année* 1777. *Hist.* p. 37—41), der keine Kenntniß des höhern Calculs voraussetzt, und nicht dem geringsten Anstoß unterworfen ist. Hr. Prof. L'Huilier ist auf denselben Beweis verfallen, in seinem gründlichen Werke (*Princ. Calc. Diff. et Int. Expos. elem. Introd.* p. V—XI.) und hat zugleich (was bey der Segnerischen Darstellung noch vermißt wird) das Gesetz des Fortgangs der Coefficienten des Hauptsatzes (Introd. p. VI—VIII.) noch etwas mehr aus einander gesetzt. Auch Herr Magister Rothe ist, ihm unbewußt, denselben Weg eingeschlagen, und wird seine Behandlung gelegentlich, und vielleicht bald, bekannt machen. Die darin, nach meiner Art ausgedrückten Binomialcoefficienten, mit ihren Relationen, werden zeigen, wie nützlich dergleichen Zeichen sind, kurz und bündig darzustellen, was ohne solche Beyhülfe (wie z. B. selbst bey Herrn L'Huilier a. a. O.) nicht anders als weitläuftig und bey weitem nicht so anschaulich vorgelegt werden kann. Was den Hauptsatz hierbey (die Coefficienten nehmlich des Produkts zweyer binomisch-entwickelten Reihen) anbetrifft, so hat solchen auch Herr Prof. Pfaff (Differ. Investig. ex Theor. Funct. Helmst. 1788. §. XII.) gründlich erwiesen und auf das Neutonische Theorem angewendet. H.

nung hinaus, so wie sie von Hr. Hofr. Kästner in der Analysis des Unendlichen §. 56. angewandt ist. Den Beweis für verneinte ganze und bejahte gebrochne Exponenten eines Binomium führt Hr. von T. so wie Segner in der Analysi Finit. Sect. V et VI.

Ich habe ehemahls (1770) auch einen Beweis des binomischen Lehrsatzes in seiner Allgemeinheit, und des polynomischen, nach der dritten Form, zu geben versucht, in einem Anhange zu meiner analytischen Trigonometrie. Von dem Beweise des erstern für negative ganze Exponenten, habe ich auch hier Gebrauch gemacht. Den polynomischen Lehrsatz leite ich aus der Vergleichung der Coefficienten in den beiden Reihen, $1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \text{etc}$, und $1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \text{etc}$ her, wenn jene zugleich $= (1+z)^n$ und diese $= (1+z)^{mn}$ ist. Es kommt darauf an, die allgemeine Form in der besondern sichtbar zu machen.

III. Hr. Prof. Fischer in Berlin gab 1792 heraus: Theorie der Dimensionszeichen, nebst ihrer Anwendung auf verschiedene Materien aus der Analysis endlicher Größen; worin die Erhebung einer vieltheiligen Größe auf eine Potenz mit einem ganzen positiven Exponenten, und auch mit jedem andern, zur Grundlage der angestellten Untersuchungen dient. Wegen der von ihm gebrauchten Bezeichnungsart und Darstellung der zum Grunde liegenden Hauptsätze, ist eine harte Klage gegen ihn erhoben worden. [n]) Was diese

n) Eine kurze Anzeige, der Kläger und ihrer Klagpuncte, der Beweise und Gegenbeweise, alles ganz summarisch, im Arch. der Math. (H. I. S. 111-119). Eine etwas detaillirtere Anzeige von beiden, mit Beurtheilung, ist in den Recensionen der Töpferischen Angriffs- und Fischerischen Vertheidigungsschrift (Neue Leipz. gel. Anz. 83. St. 1793. S. 653—659 und Tüb. gel. Anz. 87. St. 1794. S. 689—694) zweyer ganz verschiedener aber auch gleich unpartheyischer Verfasser befindlich, von denen der erste vor Kurzem für die Ausbreitung gründlicher und

betrifft, würde ich, wenn ich in einem gelehrten Gerichte meine Stimme zu geben hätte, den Ausspruch thun: Non liquet; ganz unpartheyisch, da ich mit Herrn Prof. Hindenburg in sehr freundschaftlicher Verbindung stehe, mit Hrn. Prof. Fischer aber in gar keiner. Allein, die Fischerische Bezeichnungsart steht der Hindenburgischen offenbar nach, insbesondere dadurch, daß die Versetzungszahlen der Combinationen (die Polynomialcoefficienten) nicht bezeichnet sind, und daß die Binomialcoefficienten kein Nebenzeichen der Potenz haben, wozu sie gehören. Der Zeiger, den Herr Hindenburg allemahl zusetzt, macht gleich klar, was die zu combinirenden Größen für welche sind, und wie man die in Form eines Exponenten linker Hand des Classenzeichens beygefügte Zahl (den Summenexponenten) zu verstehen habe. Herr Fischer aber hat zweyerley Dimensionszeichen, vollzählige und verkürzte, welches die Sache beschwerlich macht, so, daß eine Reduktionstafel nöthig ist. Man wird auch durch die zweyfache Bezeichnung der Glieder, mit Römischen Zahlziffern und mit Buchstaben, irre. Ein Verstoß von Wichtigkeist ist in dem Ausdruck, Dimensionszeichen, begangen, welcher einen nicht hieher gehörenden Nebenbegriff einmischt. Es ist hier nicht von der Bezeichnung der Dimensionen die Rede, sondern immer von der Bezeichnung der Abstände der Glieder a); die Hr. Fischer durch Marken bezeichnet, wobey er, um recht allgemein zu verfahren, dem Anfangsgliede eine willkührliche Zahl giebt, und die Stellen der übrigen in

nützlicher Kenntnisse in Mathematik und Physik, daran er so thätig arbeitete, viel zu frühzeitig gestorben ist. H.

a) Hieher gehören meine Distanzexponenten, die ich nicht blos, wie hier, für Glieder und Coefficienten polynomischer Größen, sondern allgemein, für jede Reihe von Größen, die eine bestimmte festgesetzte Folge haben, gebrauche. Von den Vortheilen solcher Exponenten in der Anwendung, sehe man die hier (S. 27 in der Note p) angeführten Stellen. H.

arithmetischer Progression fortlaufen läßt. Allein es ist hier gezwungen, wenn man andere Marken, als 1, 2, 3, 4, etc oder 0, 1, 2, 3, ꝛc. gebrauchen will. Es ist Schade, daß Hr. Fischer die Hindenburgischen Schriften vernachlässigt hat. Er würde seinem Werke mehr Ansehen und Brauchbarkeit verschafft haben, wenn er das von Hrn. Hindenburg geleistete zum Grunde gelegt hätte. Den polynomischen Lehrsatz hat er zu flüchtig behandelt, besonders in Absicht auf die Darstellung der möglichen Gattungen von Combinationen. p) Man darf in der Mathematik nie sagen, daß etwas geschehen solle, ohne zu zeigen, wie es geschieht. Berufungen auf den gesunden Menschenverstand, gelten in der Mathematik nicht, wenn man darunter eine undeutliche Vorstellung von Gründen und Regeln versteht. In dem gegenwärtigen Falle hätte Hr. F. sagen sollen, daß, seines Wissens, keine Regel bekannt sey,

p) Nach Herrn Prof. Fischers eigener Erklärung (über den Ursprung der Theorie der Dimensionszeichen ꝛc. §. 50. S. 34.) ist die Idee, die seiner Theorie zum Grunde liegt, ungleich beschränkter als die meinige, einer allgemeinen, in die Analysis einzuführenden combinatorischen Zeichensprache. Herr F. hat zwar in der Vorrede seines Werks (Theorie der Dimens. Zeichen S. V.) meine zweyte Hauptschrift in der Sache, *Nov Syst. Perm. Comb. ac Var.* angeführt; aber alle Umstände, und daß er die darin gegebenen Aussichten gar nicht benutzt hat, machen es wahrscheinlich, er habe die Absicht und den Nutzen dieser Schrift ganz verkannt, habe vielmehr geglaubt, durch eine vorgängige Theorie der Combinationen, werde die Sache ohne Noth weitläuftiger, sie lasse sich, auf die von ihm aufgestellte Art (die, in Absicht der zum Grunde gelegten Hauptsätze und ihrer Behandlung, über meine erste Schrift, *Infin. Dignit.* und die Eschenbachische *Ser. Revers.* nicht hinausgeht) weit kürzer behandeln und abthun. Unter den Umständen mußte also Herr Prof. Fischer die Darstellung der möglichen Gattungen von Combinationen, die Herr Prof. Klügel bey ihm vermißt, nothwendig übersehen, sie konnte ihm sogar nicht einmal einfallen, da sie so ganz außer seinem Plane lag. Ich selbst habe diese möglichen Gattungen von Combinationen (bey den verschiedenen combinatorischen Operationen) in meinen *Infinit. Dignit.* noch nicht in Betrachtung gezogen; und von diesem, von Herrn F. nicht angeführten, Werke, und jener Eschenbachischen Schrift, kann eigentlich nur bey jenen Beschuldigungen wider ihn, die Rede seyn. H.

eine jede Zahl in alle mögliche ganze Theile zu zerlegen. Uebrigens ist sein Werk sehr dienlich, die Analysis des Unendlichen ausführlicher zu studiren, zumahl, da sein Gegner, Hr. M. Töpfer, die Fischerische Charakteristik nicht allein in einer Tabelle vollständig dargestellt, sondern auch mit der Hindenburgischen verglichen hat, so, daß man diese, statt der von dem Verfasser gebrauchten, sogleich setzen kann.

IV. Hr. Prof. Hindenburg hat in dem vierten Hefte des Archivs der Mathematik eine allgemeine Darstellung des Polynomialtheorems, nach de Moivre und Boscovich, nebst verschiedenen Bemerkungen über die dabey zum Grunde liegenden lexikographischen Involutionen geliefert. Beide Formen des Theorems sind die in §. 17. entwickelten. Der Unterschied derselben, so wie der dortigen dritten, liegt bloß darin, wie die Combinationen gefunden und geordnet werden. q) Darauf gründet sich die verschiedene analytische Zeichnung derselben, welche Hr. Prof. Hindenburg giebt.

q) Es sind dieselben zusammengesetzten Größen, nur in verschiedenen Formen dargestellt. In wie fern die hier angeführten, und andere ähnliche, Formen für einander substituirt werden können, oder nicht, und wie diese oder jene vorzugsweise, oder auch wohl ausschließlich vor andern, zu brauchen sey, darüber beziehe ich mich auf das, was ich in meiner in der Folge vorkommenden Abhandlung hier und da, und noch am Schlusse derselben, im Allgemeinen gesagt habe. H.

III.

Coefficient des allgemeinen Gliedes jeder willkührlichen Potenz eines Infinitinomiums; Verhalten zwischen Coefficienten der Gleichungen und Summen der Produkte und der Potenzen ihrer Wurzeln; Transformation und Substitution der Reihen durch einander;

von

Christian Kramp,

der Arzneykunde Doktor, des Herzogl. Zweybr. Oberamts so wie der Stadt Meissenheim Physikus, der herzoglichen Lande Hebammenmeister.

Historische Vorerinnerung des Herausgebers.

Ich habe mit Herrn Doktor Kramp, dem Verfasser der Geschichte der Aërostatik und der in Gesellschaft von Hrn. Bekkerhinn herausgegebenen Krystallographie des Mineralreichs, so wie anderer mit verdientem Beyfall aufgenommenen Schriften, einen vieljährigen ununterbrochenen Briefwechsel unterhalten. Herr K. hat mir bey der Gelegenheit von Zeit zu Zeit verschiedene mathematische Aufsätze zur Bekanntmachung zugesendet, davon ich bereits einige mitgetheilt habe [a]), die übrigen theils hier beybrin-

a) „Kramp's Versuch, die Natur der bisher bekannt gewordenen Sterblichkeitstafeln durch einfache Gleichungen zu bestimmen.“ (Leipz. Mag. für reine u. ang. Math. 1787. S. 129—176); „Dess. Entwurf einer vortheilhaften Einrichtung öffentlicher Leibrenten-Cassen“ (Ebend. 1788. S. 1—46). Eine Abhandlung Herrn Kramp's „über den Mittelpunkt der Schwere des sphärischen Dreyecks,“ und eine andere: „Geometrische

gen, theils in den folgenden Heften des Archivs der Mathematik einrücken werde.

Die gegenwärtige Lage der Dinge, wo dieser verdienstvolle Mann, wenigstens noch voritzt, außerhalb seinem Vaterlande leben und seinen Unterhalt suchen muß, seine Berufsgeschäfte als praktischer Arzt, eine Menge anderer zusammentreffender ganz besonderer Umstände, selbst die herrschende Neigung, die Gränzen seiner Lieblingswissenschaft nicht blos zu erweitern, sondern auch das Feld ihrer Anwendung auf fremde Gegenstände weiter anzubauen, und da Gewißheit aufzustellen, wo vorhin nur Hypothese war: diese Umstände zusammengenommen veranlaßten Herrn D. Kramp seit einigen Jahren, den Faden von Untersuchungen, wovon seine vorlängst noch in Strasburg herausgegebene gelehrte und scharfsinnige Probeschrift, de vi vitali arteriarum, addita noua de febrium indole generali coniectura (1785), die ersten Spuren und Anlagen enthält, wieder aufzunehmen; über Kreislauf des Bluts, Lebenskraft der Gefäße und Fiber, weiter nachzudenken; zu versuchen, in wiefern sich, durch Beyhülfe der höhern Mechanik und Dynamik, die Grundgesetze auffinden lassen, welche die hier thätigen Kräfte in ihren Wirkungen unterworfen sind; in der Erfahrung endlich nachzusehen, ob und wie weit sich die von wiederholt angestellten Beobachtungen abstrahirten und durch sichere Schlüsse weiter gefolgerten Sätze bestätigen, und glücklicher Gebrauch davon in der Praxis sich machen lasse. Das Resultat dieser Untersuchungen hat Herr D. Kramp in seiner Fieberlehre nach mechanischen Grundsätzen (1794) und in der Kritik der praktischen Arzneykunde (1795) vorgelegt, in der festen Ueberzeugung — die bisher bey

Analysis des Krystalls, Hyodon genannt" (eine Widerlegung des Systems von Haüy) werden in den nächstfolgenden Heften des mathem. Archivs erscheinen. Hindenburg.

der Ausübung seiner Kunst, vorzüglich in der Fieberlehre, allgemein obwaltende Hypothesenverwirrung dadurch zerstreut, die wahren, beständigen Gesetze auf ganz mechanische, des strengsten geometrischen Zusammenhanges und Beweises fähige, Grund- und Lehrsätze zurückgeführt, selbige mit den passendsten Beobachtungen gehörig unterstützt [b]), ihre Anwendung praktisch gezeigt, und so in der Arzneykunde eine neue Epoche begründet zu haben. In wie fern nun aber die bis itzt hierüber laut gewordene (doch wohl nicht allgemeine) Stimme, diese Erwartungen bestätiget, diese Ansprüche gerechtfertiget, und ob man dabey Hrn. D. Kramp überall und durchgängig verstanden habe? — davon brauche ich wohl meinen Lesern hier nichts zu sagen [c]).

b) Herr D. Kramp bot mir einmal, wenn eine physiologische Abhandlung für mein mathematisches Magazin nicht allzufremd wäre, eine Reihe von 150 meist neuer (von ihm vorher nicht angestellter) Versuche über das Blut zum Einrücken an. Den Beobachtungsgeist Hrn. D. Kramp's werden hoffentlich die (für die Ostermesse 1796 angekündigten) beyden Schriften: Sammlung medicinisch-praktischer Beobachtungen und der Arzt, als Geburtshelfer, näher bewähren. H.

c) Ich bin weit entfernt, mir ein absprechendes Urtheil anzumaßen, da ich weder theoretischer, noch weniger praktischer Arzt bin; aber erlaubt wird mir es seyn, hier anzuführen, was Hr. D. Kramp von dem fordern kann, der sein neues Lehrgebäude widerlegen will.

Die Reihe seiner Lehrsätze mit Erfolg anzugreifen, und aus vollwichtigen Gründen zu erschüttern, müßte sein Gegner wohl den nähmlichen Weg einschlagen, den der Erfinder gegangen ist, ihn Schritt für Schritt darauf verfolgen, und so zeigen, wo und wie er gefehlt habe.

Es müßte daher bewiesen werden (wegen der folgenden Zeichen und ihrer Bedeutung sehe man den Anhang zum 7 Kap. der Krit. der prakt. Arznk. S. 180 u. f.)

1) Daß das große Fundamentalgesetz der höhern Mechanik, $du = Pdt$, in gegenwärtigem Falle, wo von Lebenskräften die Frage ist, nicht weiter anwendbar seyn könne; also auch die Gleichung $du = -Pdt + Qdt$, auf den Kreislauf angewendet, falsch sey.

2) Daß $du = 0$, oder, gleichförmige Bewegung des Blutes, keine zum gesunden Zustande und dem unge-

Die vielen, mit häufigen Reisen verbundenen Amtsarbeiten, selbst die mühsame Begründung eines neuen Lehrgebäudes der praktischen Arzneykunde, hinderte Herrn D. Kramp gleichwohl nicht zu seiner Lieblingsbeschäftigung von Zeit zu Zeit zurückzukehren, und die Mathematik unmittelbar zu bearbeiten d). Er war immer thätig, bey

hinderten Fortgange unserer körperlichen Verrichtungen nöthige Bedingung sey; also aus du = o, oder P = Q, gar keine praktische Folgerung gezogen werden könne.

3) Daß aus gleichem Grunde, aus P > Q und P < Q, gleichfalls auf den Kreislauf der Säfte im kranken Körper nichts folge, und im ersten Falle der Schluß auf eine Anhäufung des venosen Systems, im andern der Schluß auf eine widernatürliche Anfüllung der Arterien, übereilt und unrichtig sey.

Einem vorurtheilfreyen wahrheitliebenden Manne, der beyder Wissenschaften, als Theoretiker und Praktiker, gleich kundig, den ganzen Ideengang des Erfinders, Schritt vor Schritt noch einmal verfolgte, und nun zeigte, an welchen Stellen seine Schlüsse, in der Theorie zwar richtig, in der Ausübung aber unrichtig wären — einem solchen Manne würde Herr D. Kramp gewiß unendlich verbunden seyn!

Aber was soll man dazu sagen, wenn man sogar den Satz: „Wenn die Lebenskraft der Gefäße gleich ist der Summe der „Hindernisse, so ist die Bewegung des Bluts gleichförmig“ als einen falschen, dem gesunden Menschenverstande sogar zuwider laufenden, ausgeben sieht? Ist denn das so was Unbegreifliches, daß da, wo Kraft und Widerstand einander gleich sind, gleichwohl Bewegung seyn könne? und ist das nicht der Fall z. B. bey der Bewegung fallender Körper im widerstehenden Mittel, die aus einer beschleunigten in die gleichförmige übergeht, sobald die von der Kraft der Schwere herrührende Gewalt zu sinken dem Widerstande gleich wird, und der Körper bey seiner Bewegung die vitesse complette, wie sie die Franzosen nennen, erreicht hat. H.

d) Ich kann nicht umhin, aus einem seiner Briefe aus Grünstadt v. v. Jahre folgende Stelle mitzutheilen: „Die vielen hierherum eingerissenen Epidemien beschäftigen mich sehr; viel schlechtes feuchtes Wetter, mit schnell abwechselnder Wärme und Kälte, viel Azote aus Afrika und gleich darauf wieder Oxygene aus Skandinavien! Was will daraus werden? — Ich lebe itzt wie Hippokrates in Thessalien; den Tag über von einer Stadt zur andern wandernd, des Abends meine Krankheitsgeschichten und Aphorismen aufschreibend; und in

allen Widerwärtigkeiten, die ihn trafen, wo andere würden die Hände sinken und ihren Geist haben ruhen lassen; er ist immer zum Nutzen der Wissenschaften beschäftigt gewesen, selbst auf seinen Wanderungen (von seinen frühern Reisen in Frankreich und Italien ist hier die Rede nicht) durch Oestreich, Bayern, die Schweiz, Schwaben, Franken und die Rheinpfalz — Länder, die er, von den allenthalben gegen die Emigranten obwaltenden Gesetze fortgetrieben, durchstreifte. Dieser Abschnitt seines Lebens könnte, wie er sich selbst sehr launicht darüber ausdrückt, reichen Stoff zu einer zweyten Odyssee hergeben — die Begebenheiten eines verdienstvollen, von widrigem Schicksal unablässig verfolgten Mannes darstellen —

qui mores hominum multorum vidit et urbes.

Ich hoffe, man wird diese kleine Abschweifung sehr verzeihlich finden, um so mehr, da ich es meinem Freunde schuldig zu seyn glaubte, bey der so ganz genauen Kenntniß, die ich von seiner Lage habe, und bey der guten Gelegenheit, die sich mir zeigte, wenigstens so viel davon hier zu sagen, als in den wenigen Zeilen des Textes und der zugehörigen Anmerkungen steht. Ich kehre wieder zur Hauptsache zurück.

Den Beyfall abgerechnet, den meine beyden ersten Schriften im combinatorisch-analytischen Fache (Infin. Dignit. Hist. leges ac formulae und Nov. Syst. Perm. ac Var.) gleich bey ihrer ersten Erscheinung (1779 und 1781) fanden, war Herr D. Kramp von auswärtigen Gelehrten, (die also die Sache nicht unmittelbar von mir oder durch meine mündlichen Vorträge

müßigen Stunden an einem langen mathematischen Faden fortarbeitend, von dem ich Ihnen künftig noch oft und viel schreiben werde." (Das angefangene große Werk über die Reihen; mehr davon in der Folge). H.

hatten kennen lernen) der Erste, und, ich muß sagen, auch mehrere Jahre hindurch, der Einzige, der den großen Umfang und ausgebreiteten Nutzen der engsten Verbindung der Combinationslehre mit der Analysis sogleich anerkannte und sich sehr nachdrücklich darüber gegen mich erklärte. Da ich seinen schriftlichen Aufmunterungen es vornehmlich verdanke, daß ich, bey der wenigen Sensation, die übrigens die Sache in der Folge machte, in der Stille für mich (so weit es die sich immer mehr häufenden Geschäfte ganz andrer Art verstatteten) weiter gegangen bin: so wird es mir erlaubt seyn, hier noch Einiges davon beyzubringen.

Es ist etwas über zehn Jahre, daß Herr D. Kramp meine Theorie der combinatorischen Analysis und ihre ersten Anwendungen auf die Reihen, hat kennen lernen. Ohne sie erst methodisch, nach den dabey von mir aufgestellten Zeichen, Operationen und Sätzen, zu studiren, übersah er sogleich die Wichtigkeit der Sache, und äußerte (im April 1786), da er eben im Begriffe war, zu einer vorhabenden französischen Uebersetzung der Eulerischen Introductio in Anal. Infin. in zwey Bänden, die Erläuterungen und Beyträge in einen dritten Band zu sammeln, daß er darin, (um seine eigenen Worte zu gebrauchen) meine ganze Combinationstheorie mit unter diejenigen Erweiterungen der Analysis aufnehmen werde, die als die merkwürdigsten unter allen, als eine Fortsetzung des Eulerischen Werkes, erscheinen könnten *).

*) Herr Pezzi hatte die Uebersetzung des ersten Theils übernommen, Herr D. Kramp wollte den zweyten (geometrischen) übersetzen und Beyträge und Erweiterungen in einem dritten Bande nachliefern. Der erste, von Hrn. Pezzi besorgte Band, ist auch (1786) wirklich erschienen; da aber dieser, sowohl in Absicht auf Uebersetzung als Anmerkungen, auch wegen eigenmächtiger Weglassung vieler Absätze des Originals, den Beyfall des Publikums ganz verfehlte (Herr K. klagt laut darüber in seinen Briefen), so trug die Verlagshandlung, und

In Absicht auf diesen schnellen Ueberblick des Werthes und Nutzens der Combinationsverfahren in der Analysis, befand sich damals Herr Kramp in demselben Falle mit Leibnitzen. Dieser, so wie ihm der glückliche Einfall zuerst gekommen war, versuchte die Anwendbarkeit desselben in einigen Beyspielen, und entschied sogleich den Werth der Sache auf eine absolute Art — ohne erst die Gründe und Hauptsätze, nebst den dafür nöthigen Zeichen und Operationen, aufzusuchen, wodurch er die Vortheile, die sich dadurch schaffen lassen, auch Andern verständlich hätte vorlegen und begreiflich machen können [f]). Leibnitz hat gleichwohl von der Sache in der Folge fast nie anders, als mit Enthusiasmus gesprochen [g]).

eben so auch Hr. D. Kramp, Bedenken, das Unternehmen fortzusetzen. H.

f) Dieser Umstand ist gleichwohl der guten Sache in der Folge nachtheilig gewesen. Konnte doch Leibnitz den wichtigen Einfluß der Combinationslehre auf die Analysis, bey einer sehr verwickelten Aufgabe (*Infin. Dign. Praef. p.* XV-XVIII.) seinem Freunde Joh. Bernoulli nicht begreiflich machen. Er hatte die Sache mit den Augen des Verstandes bis auf den Grund durchschaut, aber es fehlten ihm schickliche Worte und Zeichen, sich deutlich darüber auszudrücken. (*Nov. Syst.* p. XVI. not. q. Toepf. comb. Anal. S. 41-44); und so gingen auch Boscovich's und Cramers nachher gelieferte trefliche Proben, für die Wissenschaft verloren. Der Zufall hatte sie herbeygeführt; es waren Bruchstücke eines unbekannten Ganzen, einzelne Aeste eines großen sehr ausgebreiteten Baumes, von dem man Stamm und Wurzel nicht zu finden wußte. Ganz natürlich also — euenit, quod rebus humanis solet: res ignota despicatui primum habita, post est adducta in obliuionem, et regionibus analyticis hac parte grauis rursus incubuit nox (*Nov. Syst. Perm. Praef.* p. IX). H.

g) Ich rede hier nicht von Leibnitzens Aeußerungen über die Analysin axiomatum und das Alphabetum cogitationum humanarum, die er von einer, auf die Combinationslehre zu gründenden, Analysi suprema erwartete; Aeußerungen — die in einigen Stellen nahe an Schwärmerey gränzen. Ich verstehe blos die natürlichen Ausbrüche von Bewunderung, welche die entzückenden Aussichten in ein neues Land, ihm veranlaßten, das er im Geiste schon

Die von Herrn D. Kramp (1788) unternommene Reise nach Frankreich, noch mehr aber die oben erwähnten und später erfolgten Wanderungen durch einen großen Theil von Deutschland, haben unstreitig den Lauf seiner mathematischen Untersuchungen sehr gehemmt, und vermuthlich haben selbst die äußern Umstände kräftig dazu gewirkt, seine Aufmerksamkeit in der Zeit mehr auf Naturkunde und Ausübung der Arzneykunst zu richten. Nun erst seit einiger Zeit, da Herr K. mehr Gewisheit über seinen Aufenthalt und Unterhalt hat, welches beydes ihm die Pfalz bisher gewähret, finde ich deutliche Spuren anhaltend fortgesetzter mathematischer Beschäftigungen, und unter diesen auch die interessante Nachricht (vom 16. Dec. 1795) wegen eines seit einiger Zeit bereits angefangenen großen Werkes über unendliche Reihen, mit Zuziehung der Analysis des Unendlichen und in Verbindung mit der Combinationslehre. Dahin gehören unter andern: die allgemeinen Gesetze der Reihen, die aus der Entwickelung von $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3} \ldots \frac{d^ny}{dx^n}$ entstehen; gegebene unendliche Reihen auf jede beliebige Funktion zu erheben; die Auflösung aller nur gedenkbaren algebraischen und transcendenten Gleichungen durch unendliche Reihen zu bestimmen, und zugleich die beständigen Gesetze ihrer Coefficienten anzugeben; eine allgemeine, von der Entwickelung des Denominators unabhängige Theorie der recurrirenden Reihen aufzustellen; eben so auch eine allgemeine Auflösung der Equations aux differences finies; Substitution, Transformation, Reversion der Reihen; Elimination unbekannter Größen aus gegebenen Gleichungen; u. s. w. h).

ganz durchreist hatte, und das nur noch für Andere — eine terra incognita war. Mehrere Stellen beyderley Art habe ich hier und da in meinen Schriften angeführt. H.

h) Es kann nicht fehlen, daß Herr D. Kramp auf manches von

Wegen der Combinationslehre, varnehmlich in Absicht auf die von mir eingeführte Bezeichnung, verlangte Herr D. Kramp, mit demjenigen, was seit etwa 10 Jahren Vorzügliches über die combinatorische Analysis geschrieben worden, eine gelehrte Unterstützung ihm zukommen zu lassen [i]), die um so nöthiger sey, da er das, was ich ihm zu anderer Zeit zugeschickt, nicht erhalten habe, er überdies von allen gelehrten Hülfsmitteln entblößt sey, seine in der Eil und zu seinem Privatgebrauche gewählten Zeichen ihm nicht Genüge thun, er auch, wegen so mannichfaltiger Beschäftigungen ganz anderer Art, an bessere, ausdruckvollere nicht denken könne; u. s. w. Diesen Aeusserungen fügte er noch (am 7 Febr. 1796) die ausdrückliche Erklärung bey: „Ich warte mit Sehnsucht auf Al-

mir und Andern schon Bearbeitete und Gesagte treffen mußte. Ohne eine umständliche Nachweisung darüber zu geben, will ich hier nur im Allgemeinen erinnern: 1) daß, was überhaupt die Anwendung der Differentialausdrücke $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots \frac{d^ny}{dx^n}$ auf die Reihen anbetrifft, die Hauptsätze allgemeiner Differenzen und Summen, nebst Taylors Satz, beyde nach meiner Darstellung, so wie mein allgemeines Produktenproblem, imgleichen Herrn M. Rothens Lokalformeln für höhere Differenziale und Herrn Prof. Pfaffs allgemeine Summenformel (die sämtlich im math. Arch. B. I. befindlich sind) sehr gute Dienste hierbey leisten können. Auch ist neuerlich Hrn. Prof. L'Huilier's sehr schätzbares Werk: *Princ. Calc. differ. et integr. expos. elem.* (1795) erschienen, das viel hieher gehörige Sätze und Aufgaben enthält. 2) Meine combinatorische Auflösung der recurrirenden Reihen ist bekannt. (*Nov. Syst. Perm.* p. LXXVIII. seq. vergl. mit *Infin. Dign. p.* 65, 66, dort. Anm.) Eine neue Methode, das allgemeine Glied solcher Reihen zu finden, von Herrn Trembley zu Berlin, habe ich vor Kurzem zum Einrücken erhalten. 3) Ferner gehören hieher mehrere einzelne, im Archive nicht befindliche Abhandlungen von mir, und den Herren Eschenbach, Toepfer, Rothe, v. Prasse. H.

i) Ich habe Herrn D. Kramp neuerlich sämtliche combinatorisch-analytische, von mir und Andern herausgegebene, ältere und neuere, Schriften und einzelne Aufsätze nach Mannheim übersendet, und von daher zurück mehrere schriftliche Aufsätze ähnlicher Art von ihm zum Einrücken fürs Archiv erhalten. H.

„les, was die Combinationslehre betrift; überzeugt, daß „durch die weitere Aufklärung derselben unserer ganzen „höhern Mathematik noch eine Revolution bevorsteht, die „der durch die Infinitesimalrechnung bewirkten wenigstens „gleich zu setzen ist. — Ich habe gefunden, daß die ganze, „bisher für unmöglich gehaltene, allgemeine Auflösung der „Equations aux differences finies auf der „Combinationslehre beruhe" — k).

Herr D. Kramp scheint erst neuerlich (um 1794) mit der neuen Theorie der Reihen, in der oben angezeigten Maße und Absicht, sich ernstlich beschäftigt zu haben. Er hat, wie er mir schreibt, in seinen müßigen Stunden vieles darinn theils angefangen, theils vollendet, wobey, wie er zugleich bemerkt, wegen seiner Lage, und daß er ohne alle gelehrte Hülfsmittel gearbeitet, es nicht fehlen könne, er werde manches sagen, was schon gesagt worden sey; manches aber werde doch, wie er hoffe, ganz neu seyn. Um meine Leser in Stand zu setzen, selbst davon urtheilen zu können, will ich Einiges von dem, was er mir zugeschickt hat, so viel der Raum verstattet, mit seinen eignen Worten hier aufführen.

Hindenburg.

Heppenheim, den 14. Jun. 1795.

„Ew. — empfangen hiermit einige Lehrsätze über „die Coefficienten, des allgemeinen Gliedes der Potenz ei-

k) Etwas Aehnliches von der Bezeichnung der differences partielles nach Fontaine, und daß das Gesetz der dabey vorkommenden Δx, Δy und dx, dy und ihrer Potenzen, durch einzelne Glieder von Variationsklassen sich ausdrücken, und dadurch der Fortgang für andere Glieder, und so viel veränderliche Größen als man will, leicht angeben lasse, habe ich (Arch. d. Math. S. 216) erinnert. Auch der Variationscalcul hat große und nachdrückliche Unterstützung von der Combinationslehre in der Folge zu erwarten. H.

„nes Infinitinomiums, so wie der Gleichungen und die „Summen der Potenzen ihrer Wurzeln, weiter ausge„dehnt, wenn ich nicht irre, als es gewöhnlich geschieht. „Ich muß es Ihnen ganz überlassen, zu beurtheilen, ob „die Sätze neu sind, und ob sie in Ihr mathematisches „Archiv eingerückt zu werden verdienen. Seit etwa 8 „Jahren habe ich kaum ein mathematisches Buch ansehen „können. Ihre lehrreichen Schriften über das Infiniti„nomium (Infinit. Dignitat.) und die Combinations„lehre (Nov. Syst. Perm. Comb. ac Var.), die Sie „mir noch vor meiner Abreise nach Paris schickten, hatte „ich damals nicht, und nachher noch viel weniger, Zeit „durchzugehen; und was Sie seitdem mir zu übersenden „die Güte hatten, erhielt ich gar nicht auf den vielen „Wanderungen, die den Ort meines Aufenthalts immer „ungewiß machten. Vorzüglich vermuthe ich von dem „allerersten Satze (1, 2, 3), daß er, seiner Einfachheit we„gen, schon lange nicht mehr neu seyn kann [1]); und ich „schäme mich gewissermaßen, ihn itzt erst, etwa vor ein „paar Tagen, entdeckt zu haben. Finden Sie, daß „meine Arbeit gut ist, so stehen Ihnen mehrere Abhand„lungen ähnlicher Art zum Einrücken in Ihre periodische „Schrift zu Diensten" —

Kramp.

1) Ueber den ersten Erfinder dieses merkwürdigen Satzes, meine *Infin. Dign.* §. XII. Die verschiedenen Gestalten desselben; ebend. §. XIII. Der Ursprung des Coefficienten, den dieser Satz finden lehrt, ist combinatorisch, und in so fern ist er mit der Versetzungszahl (numerus permutationum) gegebener Dinge einerley (*Moivr. Misc. Anal.* p. 218). Als solche, gehört sie zugleich dem allgemeinen Potenzgliede $A^p B^q C^r D^s$ ... zu (man sehe 1 und 2 auf der folgenden Seite) und so habe ich dieser Zahl (die Hr. Kramp in der Folge mit K bezeichnet) vorlängst den analytischen Namen Polynomialcoefficient gegeben (*Nov. Syst.* IX, 24 u. XI, 10). H.

I. Coefficient des allgemeinen Gliedes in der unbestimmten Potenz eines Infinitinomiums.

1. **Aufgabe.** Man verlangt den Coefficienten des allgemeinen Gliedes $A^p B^q C^r D^s$ etc. in der unbestimmten Potenz des Infinitinomiums $(A+B+C+D+\text{etc.})^m$.

2. **Auflösung.** Der verlangte Coefficient heiße K. Man mache folgende Produkte:

$$m(m-1)(m-2) \ldots 3.2.1. = m'$$
$$p(p-1)(p-2) \ldots 3.2.1. = p'$$
$$q(q-1)(q-2) \ldots 3.2.1. = q'$$
$$r(r-1)(r-2) \ldots 3.2.1. = r'$$
$$s(s-1)(s-2) \ldots 3.2.1. = s' \text{ \&c. \&c.}$$

so ist $K = \dfrac{m'}{p'q'r's'\text{etc}}$

3. **Zusatz.** Da $m = p+q+r+s+\text{etc}$, so läßt sich m' durch jedes der Produkte $p', q', r', s' \ldots$ dividiren. Gesetzt also, die größte der Zahlen p, q, r, s, etc sey p, so ist der kürzeste Weg, den Zahlen-Coefficienten K zu finden, folgender: man dividire das Produkt $m(m-1)(m-2)\ldots(p+2)(p+1)$ durch $q'r's'$ etc.

4. **Aufgabe.** Das Infinitinomium $ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + dx^\delta + \text{etc}$ soll auf die Potenz des Exponenten m erhöht werden. Man verlangt den Coefficienten des allgemeinen Gliedes x^ω.

5. **Auflösung.** Man setze $ax^\alpha = A$, $bx^\beta = B$, $cx^\gamma = C$, $dx^\delta = D$, etc. Der Sinn der Aufgabe erfordert, die Exponenten p, q, r, s etc, so zu bestimmen, daß $\alpha p + \beta q + \gamma r + \delta s + \text{etc} = \omega$, zugleich aber $p+q+r+s+\text{etc} = m$ werde [m]. Außerdem ist die

m) Man sehe meine Schlußerinnerung am Ende der Abhandlung. H.

Aufgabe noch durch die Bedingung eingeschränkt, daß jede der Größen p, q, r, s, etc, eine ganze bejahte Zahl, oder auch o sey. Sind die möglichen Combinationen oder Verbindungen der Exponenten p, q, r, s etc, alle erschöpft, so bestimme man für jede derselben den Zahlen-Coefficienten K des Gliedes $A^p B^q C^r D^s$ etc (2; 3) so ist der gesuchte allgemeine Coefficient $= \int K . a^p b^q c^r d^s$ etc.

6. Beispiel. Man verlangt den Coefficienten des Glieds x^{120}, in der Vier und zwanzigsten Potenz des Quadrinomiums $ax^3 + bx^5 + cx^7 + dx^{10}$.

7. Auflösung. Die beiden Gleichungen sind hier:

$$p + q + r + s = 24$$
$$3p + 5q + 7r + 10s = 120$$

also $2p = 2r + 5s$; und $2q = 48 - 4r - 7s$. Zuerst also muß s eine gerade Zahl seyn. Und dann, läßt die Ausschließung der verneinten Werthe (5) keine andern Voraussetzungen für s zu, als 0, 2, 4, 6.

8. Für $s = 0$, sind für r keine andern Voraussetzungen erlaubt, als die Reihe der natürlichen Zahlen, von 0 bis 12. Ueberhaupt also 13 mögliche Verbindungen; und diese sind mit den dazu berechneten Coefficienten,

s	r	q	p	K
0.	0.	24.	0.	1
0.	1.	22.	1.	552
0.	2.	20.	2.	63756
0.	3.	18.	3.	2691920
0.	4.	16.	4.	51482970
0.	5.	14.	5.	494236512
0.	6.	12.	6.	2498640144

				K
0.	7.	10.	7. . . .	673103059 2
0.	8.	8.	8. . . .	9465511770
0.	9.	6.	9. . . .	6544057520
0.	10.	4.	10. . . .	1963217256
0.	11.	2.	11. . . .	194699232
0.	12.	0.	12. . . .	2704156

9. s = 2, läßt in allem neun verschiedene Verbindungen zu. Diese sind mit ihren Coefficienten

s	r	q	p	K
2.	0.	17.	5 . . .	7268184
2.	1.	15.	6 . . .	329491008
2.	2.	13.	7 . . .	4942365120
2.	3.	11.	8 . . .	32125373280
2.	4.	9.	9 . . .	98160862800
2.	5.	7.	10 . . .	141351642432
2.	6.	5.	11 . . .	187951045184
2.	7.	3.	12 . . .	21416915520
2.	8.	1.	13 . . .	1235591280

10. Die Voraussetzung s = 4, giebt sechs mögliche Verbindungen. Sie sind mit ihren Coefficienten

s	r	q	p	K
4.	0.	10.	10 . . .	1963217256
4.	1.	8.	11 . . .	16062686640
4.	2.	6.	12 . . .	37479602160
4.	3.	4.	13 . . .	28830463200
4.	4.	2.	14 . . .	6177956400
4.	5.	0.	15 . . .	164745504

11. Die beyden Verbindungen für s = 6 sind:

s	r	q	p	K
6.	0.	3.	15 . . .	109830336
6.	1.	1.	16 . . .	341186376

12. Der gesuchte allgemeine Coefficient zu x^{120} ist nunmehr die Summe von 30 Produkten, deren jedes gleich ist, einem der Literal-Potenzen-Produkte, $a^p\, b^q\, c^r\, d^s$, mit dem zugehörigen Zahlen-Coefficienten multipliciret.

II. Verhalten der Coëfficienten der Gleichungen zu den Summen der Potenzen ihrer Wurzeln.

1. Erklärung. Es sey die Summe der Grössen $Z+Y+X+V+\text{etc}$ bezeichnet durch A. Die Summe der Produkte von Zwey zu Zwey, oder $ZY+ZX+ZV+YX+YV+XV+\text{etc}=B$. Die Summe der Produkte von Drey zu Drey, oder $ZYX+ZYV+ZXV+YXV+\text{etc}=C$. Die Summe der Produkte von Vier zu Vier, oder $ZYXV+\text{etc}=D$ etc.

2. Lehrsatz. Die Reihe

$$\begin{array}{l} Z^0+Y^0+X^0+V^0+\text{etc} \\ Z^1+Y^1+X^1+V^1+\text{etc} \\ Z^2+Y^2+X^2+V^2+\text{etc} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}$$

ist eine zurücklaufende Reihe (Series recurrens) und hat zur Scale $+A-B+C-D$ u. s. w.

3. Beweis. $Z^n+Y^n+X^n+V^n+\text{etc}$ ist das allgemeine Glied der Reihe, die sich aus der Division durch $(1-Z)(1-Y)(1-X)(1-V)$ etc entwickelt. Dieses letztere Produkt aber ist nichts anders, als $1-A+B-C+D-\text{etc}$. Folglich etc.

4. Dem zufolge sind die Summen der Potenzen zweyer Grössen, wie folget:

$$Z^0+Y^0=2$$
$$Z^1+Y^1=A$$
$$Z^2+Y^2=AA-2B$$
$$Z^3+Y^3=A^3-3AB.$$

$Z^4 + Y^4 = A^4 - 4AAB + 2BB$
$Z^5 + Y^5 = A^5 - 5A^3B + 5ABB$
$Z^6 + Y^6 = A^6 - 6A^4B + 9AABB - 2B^3$
$Z^7 + Y^7 = A^7 - 7A^5B + 14A^3B^2 - 7AB^3$
$Z^8 + Y^8 = A^8 - 8A^6B + 20A^4B^2 - 16A^2B^3 + 2B^4$
$Z^9 + Y^9 = A^9 - 9A^7B + 27A^5B^2 - 30A^3B^3 + 9AB^4$
$Z^{10} + Y^{10} = A^{10} - 10A^8B + 35A^6B^2 - 50A^4B^3$
$+ 25A^2B^4 - 2B^6$

Das allgemeine Glied der Reihe ist $Z^n + Y^n = A^n - nA^{n-2}B + \frac{1}{2}n^{n-3}\mathfrak{A}A^{n-4}B^2 - \frac{1}{3}n^{n-4}\mathfrak{B}A^{n-6}B^3 + \frac{1}{4}n^{n-5}\mathfrak{C}A^{n-8}B^4 - \frac{1}{5}n^{n-6}\mathfrak{D}A^{n-10}B^5 + \frac{1}{6}n^{n-7}\mathfrak{E}A^{n-12}B^6 - \text{etc.}$ [n]).

5. Die Summen der Potenzen dreyer Größen, Z, Y, X.

$Z^0 + Y^0 + X^0 = 3$
$Z^1 + Y^1 + X^1 = A$
$Z^2 + Y^2 + X^2 = AA - 2B$
$Z^3 + Y^3 + X^3 = A^3 - 3AB + 3C$
$Z^4 + Y^4 + X^4 = A^4 - 4A^2B + 4AC + 2BB$
$Z^5 + Y^5 + X^5 = A^5 - 5A^3B + 5A^2C + 5AB^2 - 5BC$
$Z^6 + Y^6 + X^6 = A^6 - 6A^4B + 6A^3C + 9A^2B^2 - 12ABC$
$- 2B^3 + 3CC.$
$Z^7 + Y^7 + X^7 = A^7 - 7A^5B + 7A^4C + 14A^3B^2 - 21A^2BC$
$- 7AB^3 + 7AC^2 + 7BBC$
$Z^8 + Y^8 + X^8 = A^8 - 8A^6B + 8A^5C + 20A^4B^2 - 32A^3BC$
$- 16A^2B^3 + 12A^2C^2 + 24AB^2C + 2B^4 - 8BCC.$
$Z^9 + Y^9 + X^9 = A^9 - 9A^7B + 9A^6C + 27A^5B^2 - 45A^4BC$
$- 30A^3B^3 + 18A^3C^2 + 54A^2B^2C + 9AB^4$
$- 27ABC^2 - 9B^3C + 3C^3.$
$Z^{10} + Y^{10} + X^{10} = A^{10} - 10A^8B + 10A^7C + 35A^6B^2$

n) Ich habe hier im Texte, statt der auf gewöhnliche Art durch n ausgedrückten Binomial-Coefficienten, meine abkürzenden Zeichen n-3$\mathfrak{A}$, n-4$\mathfrak{B}$, n-5$\mathfrak{C}$ u. s. w. (hier S. 66 *) gebraucht, die das Fortgangsgesetz deutlich vor Augen legen. H.

$- 60 A^5BC - 50A^4B^3 + 25A^4C^2 + 100 A^3B^2C$
$+ 25 A^2B^4 - 60 A^2BC^2 - 40 AB^3C + 10AC^3 - 2B^5$
$+ 15 B^2C^2.$

6. Die Summen der Potenzen von vier Größen, Z, Y, X, V.

$Z^0 + Y^0 + X^0 + V^0 = 4$

$Z^1 + Y^1 + X^1 + V^1 = A$

$Z^2 + Y^2 + X^2 + V^2 = A^2 - 2B$

$Z^3 + Y^3 + X^3 + V^3 = A^3 - 3AB + 3C$

$Z^4 + Y^4 + X^4 + V^4 = A^4 - 4A^2B + 4AC + 2BB - 4D$

$Z^5 + Y^5 + X^5 + V^5 = A^5 - 5A^3B + 5A^2C + 5AB^2 - 5AD$
$- 5BC$

$Z^6 + Y^6 + X^6 + V^6 = A^6 - 6A^4B + 6A^3C + 9A^2B^2 - 6A^2D$
$- 12ABC - 2C^3 + 6BD + 3CC$

$Z^7 + Y^7 + X^7 + V^7 = A^7 - 7A^5B + 7A^4C + 14A^3B^2$
$- 7A^3D - 21A^2BC - 7AB^3 + 14ABD + 7ACC$
$+ 7BBC - 7CD.$

$Z^8 + Y^8 + X^8 + V^8 = A^8 - 8A^6B + 8A^5C + 20A^4B^2$
$- 8A^4D - 32A^3BC - 16A^2B^3 + 24A^2BD + 12A^2C^2$
$+ 24AB^2C - 16ACD + 2B^4 - 8B^2D - 8BC^2 + 4D^2.$

$Z^9 + Y^9 + X^9 + V^9 = A^9 - 9A^7B + 9A^6C + 27A^5B^2$
$- 9A^5D - 45A^4BC - 30A^3B^3 + 36A^3BD$
$+ 18A^3C^2 + 54A^2B^2C - 27A^2CD + 9AB^4$
$- 27AB^2D - 27ABC^2 + 9ADD - 9B^3C + 18BCD$
$+ 3C^3.$

$Z^{10} + Y^{10} + X^{10} + V^{10} = A^{10} - 10A^8B + 10A^7C$
$+ 35A^6B^2 - 10A^6D - 60A^5BC - 50A^4B^3$
$+ 50A^4BD + 25A^4C^2 + 100A^3B^2C - 40A^3CD$
$+ 25A^2B^4 - 60A^2B^2D - 60A^2BC^2 + 15A^2D^2$
$- 40AB^3C + 60ABCD + 10AC^3 - 2B^5 + 10B^3D$
$+ 15B^2C^2 - 10BD^2 - 10C^2D.$

— — —

7. Und nun die Summe des allgemeinen Gliedes $Z^n + Y^n + X^n + V^n + U^n + T^n +$ etc durch A, B, C, D,

E, F, etc ausgedrückt. Dies beruht auf folgenden Regeln:

a) Der Grössen A, B, C, D, E, F, etc müssen eben so viele seyn, als der Grössen Z, Y, X, V, U, T, etc selbst sind.

b) Die Grössen A, C, E, etc sind alle bejaht; die Grössen B, D, F, etc verneint. Aus den Zeichen der Faktoren erkennen sich die Zeichen der Produkte.

c) Die einzelnen Glieder der Reihe $Z^n + Y^n + X^n + V^n +$ etc sind von der allgemeinen Form $A^p B^q C^r D^s$ etc. Die Exponenten p, q, r, s, etc. sind durch die Gleichung bestimmt: $p + 2q + 3r + 4s +$ etc $= n$; und dann durch die Bedindung, daß p, q, r, s, etc. ganze bejahte Zahlen, oder auch 0 seyn müssen.

d) Der Coefficient eines solchen Gliedes $A^p B^q C^r D^s$ etc, ist allemal gleich, dem Zahlen-Coefficienten K desselben (S. 102, 2 und Note l) mit n multiplicirt, und durch $+ p + q + r + s +$ etc dividiret; oder

$$= \frac{nK}{p + q + r + s + \text{etc}} = \frac{nK}{m},$$ wenn man (wie S. 102, 5) $p + q + r + s + t +$ etc $= m$ setzt.

8. Anm. 1. des Herausg. Die hier vorkommende Reihe (2, 3) ist eine Series recurrens pura, und man findet durch Beyhülfe der so einfachen Scale $+ A - B + C - D \ldots$ ein Glied nach dem andern, aus den vorhergehenden, in A, B, C, D ... ausgedrückt (4, 5, 6). So leicht dies Verfahren an sich ist, so wird es doch, bey mehrern Grössen Z, Y, X, V, T, S ... und einem etwas grössern Werthe von n, weitläuftig, selbst, wegen der öftern Recurrenz und der Reduction der Zahlen, in der Folge beschwerlich. Es giebt aber, was man bey einem so äußerst simpeln Verfahren, als das eben angeführte ist, nicht denken sollte, gleichwohl noch ein ande-

res, ungleich viel leichteres und geschmeidigeres — eine combinatorische Involution — die das Vorhergehende für das Gegenwärtige auf einmal darstellt, und für das Folgende sogleich weiter (durch bloßes Anfügen) bearbeitet werden kann. Von dieser Involution in meiner Abhandlung, am Ende dieser Schrift.

Anm. 2. Zu diesem Satze schickte mir Herr D. Kramp, aus Mannheim (den 5. Septbr. 1795) einen Pendant, den er, nebst einigen andern beygefügten Aufgaben, etwas anders dargestellt (von Ebendaher d. 3. May 1796) wiederholte. Nach dieser letzten Darstellung will ich den Satz hier aufführen, und noch ein paar andere, mir von ihm mitgetheilte, beyfügen.

III. Aufgabe.

1. Es sey einerseits

$+ A'$ die Summe der Größen $Z + Y + X + W + V + U +$ etc
$- B'$ die Summe ihrer Produkte ex binis
$+ C'$ die Summe ihrer Produkte ex ternis
$- D'$ die Summe ihrer Produkte ex quaternis
. . . . .
$\pm \mathcal{N}'$ die Summe ihrer Produkte ex (n)tis *)

Andererseits sey
$+ A,$ die Summe der Größen $Z + Y + X + W + V + U +$ etc
$- B,$ die Summe der Quadrate dieser Größen
$+ C,$ . . . Würfel . .
$- D,$ . . . Biquadrate . .
etc etc etc

*) Es werden hier, wie im Vorhergehenden (105,1) Combinationen ohne Wiederholungen (non admissis repetitionibus) verstanden, deren Classen ich durch A', B', C', D' ... $\mathcal{N}'$ ausdrücke (*Nov. Syst. Perm. p. xx.*)

$\pm \mathcal{N}$, die Summe der Potenzen $Z^n + Y^n + X^n + W^n + V^n + U^n +$ etc Die Glieder der einen Reihe werden als gegeben vorausgesetzt; man sucht die Glieder der andern.

Auflösung.

$$\pm \mathcal{N} = n \int \frac{m' A'^p B'^q C'^r D'^s \text{ etc}}{m \; p' \; q' \; r' \; s' \text{ etc}}$$

$$\pm \mathcal{N} = \int \frac{A^p B^q C^r D^s \ldots}{p' q' r' s' \ldots \times 1^p 2^q 3^r 4^s \ldots}$$

In beiden Ausdrücken werden die Exponenten p, q, r, s... aus den möglichen Auflösungen der unbestimmten Gleichung $p + 2q + 3r + 4s +$ etc $= n$ in ganzen und bejahten Zahlen bestimmt. Es ist ferner der Kürze wegen angenommen $m = p + q + r + s +$ etc und die Buchstaben m', p', q', r', s' etc behalten die oben (102.2) angegebenen Werthe.

2. Anm. Der erste dieser beiden Sätze läßt sich aus der Bemerkung herleiten, daß die Reihe $+A - B + C - D +$ etc eine recurrirende Reihe ist, die zur Scale hat $+A'$, $-B'$, $+C'$, $-D' +$ etc. Er läßt sich aber auch aus dem Logarithmus des Infinitinomiums, vermittelst der Combinationslehre, ohne alle Induction, mit mathematischer Schärfe, beweisen. So erweißt ihn Herr von Prasse (Usus Logarithmorum Infinitinomii in Theoria Aequationum. Lips. 1796); nur daß er den Beweis viel kürzer hätte abfassen können. Es war nemlich zu dieser Absicht vollkommen hinlänglich anzunehmen: $(1 + Zx)(1 + Yx)(1 + Xx) \ldots = 1 + A'x - B'x^2 + C'x^3 - D'x^4 +$ etc. p).

p) Herr von Prasse hat diesen Satz, der bey ihm gefolgert wird, nicht annehmen wollen, weil er in seiner Schrift überhaupt nur die Potenz eines Infinitinomiums und die Begriffe von Logarithmen voraussetzt und als gegeben ansieht. Daß er die Entstehung der Potenzformel mit beygebracht hat,

Der andere Satz ist, so viel ich weiß, ganz neu. Ein Corollarium davon ist folgender Satz:

3. Aufgabe. Es ist gegeben die Reihe der natürlichen Zahlen, von 1 bis zu m, exclusive; man sucht

1) die Summer dieser Zahlen $= A'$
2) die Summe ihrer Produkte ex binis $= B'$
3) „ „ „ „ ex ternis $= C'$
4) „ „ „ „ ex quaternis $= D'$
und überhaupt
die Summe ihrer Produkte ex (*n*)tis $= \mathcal{N}'$

4. Auflösung $N' = \int \frac{m!}{p'q'r's'\ldots \times 1^p 2^q 3^r 4^s \ldots}$

wobey die Exponenten p, q, r, s etc nach der Zahl der möglichen Auflösungen der beiden Gleichungen

$$p + q + r + s + \text{etc} = m - n$$
$$p + 2q + 3r + 4s + \text{etc} = m$$

in ganzen und bejahten Zahlen bestimmt werden müssen.

5. Beyspiel. Es sind gegeben, die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; man verlangt die Summe ihrer Produkte ex quaternis (ohne Wiederholungen).

Auflösung. Die beiden unbestimmten Gleichungen sind hier

$$p + q + r + s + \text{etc} = 6$$
$$p + 2q + 3r + 4s + \text{etc} = 10$$

Fünf Auflösungen in ganzen und bejahten Zahlen sind hier möglich; und diese sind:

ist bloß der Leser wegen geschehen, die mit den combinatorischen Zeichen und Begriffen noch nicht recht bekannt sind. Eigentlich setzt er die Kenntniß der combinatorischen Potenzformel und ihres Gebrauchs voraus. H.

p	q	r	s	t
5	0	0	0	1
4	0	2	0	0
4	1	0	1	0
3	2	1	0	0
2	4	0	0	0

Folglich ist die verlangte Summe $= 10.\,9.\,8.\,7.\,6.\,5.\,4.\,3.\,2.\,1$ multiplicirt mit $\frac{1}{5.4.3.2.1.5} + \frac{1}{4.3.2.1.2.1.9} + \frac{1}{4.3.2.1.8} + \frac{1}{3.2.1.2.1.12} + \frac{1}{2.1.4.3.2.1.16}$, und dieses beträgt $21 \times (288 + 400 + 900 + 1200 + 225) = 63273$. Die Zahl der Produkte selbst ist wie bekannt $= \frac{9.\,8.\,7.\,6.\,5}{1.\,2.\,3.\,4.\,5} = 126$.

6. Anm. Mit einer leichten Modification erstreckt sich das Problem auch auf die Glieder der harmonischen Reihe $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots \frac{1}{m}$, exclusive.

IV. Aufgabe.

1. Die unendliche Reihe, die e^{e^x} ausdrückt, hat folgende allgemeine Form: $e\,(1 + \frac{Ax}{1} + \frac{Bx^2}{1.2} + \frac{Cx^3}{1.\,2.\,3} + \frac{Dx^4}{1.\,2.\,3.\,4} + \text{etc})$; man verlangt das allgemeine Gesetz der Coefficienten.

Auflösung. Eine Differentiation zu beiden Seiten führt auf folgende Reihe von Gleichungen:

$A = 1$; $B = A + 1$; $C = B + 2A + 1$;
$D = C + 3B + 3A + 1$; $E = D + 4C + 6B + 4A + 1$;

und überhaupt, das nte Glied $\mathcal{N}$ aus allen vorher-

gehenden, $\overset{-1}{\mathcal{N}}$, $\overset{--1}{\mathcal{N}}$, . . . und den Binomialcoefficienten ${}^{n-1}\mathfrak{A}$, ${}^{n-1}\mathfrak{B}$, . . . ausgedruckt, das ist:

$$\mathcal{N} = \overset{-1}{\mathcal{N}} + {}^{n-1}\mathfrak{A}\overset{-2}{\mathcal{N}} + {}^{n-1}\mathfrak{B}\overset{-3}{\mathcal{N}} + {}^{n-1}\mathfrak{C}\overset{-4}{\mathcal{N}} + {}^{n-1}\mathfrak{D}\overset{-5}{\mathcal{N}} + \text{etc.}$$

2. Demnach ist zwar jeder Coefficient aus allen vorhergehenden bestimmt, und es wird $e^{e^x} = e$ multiplicirt mit

$$1 + x + \frac{2x^2}{1.2} + \frac{5x^3}{1.2.3} + \frac{15x^4}{1.2.3.4} + \frac{52x^5}{1.2\ldots5} + \frac{203x^6}{1.2\ldots6}$$
$$+ \frac{877x^7}{1.2\ldots7} + \frac{4140x^8}{1.2\ldots8} + \frac{21147x^9}{1.2\ldots9} + \frac{116015x^{10}}{1.2\ldots10} + \text{etc;}$$

aber die Berechnung hängt hier von einer Equation aux differences finies ab, die wegen der Recurrenz äußerst beschwerlich ist.

3. Eine von den vorhergehenden Coefficienten ganz unabhängige Bestimmung jedes willkührlichen Coefficienten, außer der Ordnung, findet man durch die Combinationslehre. Ihr zu folge, ist der Coefficient des Gliedes x^n, oder

$$\mathcal{N} = \int \frac{n'}{p'\,q'\,r'\,s'\ldots \times 1^p\,2^q\,6^r\,24^s\,120^t\ldots}$$

Diese Formel enthält folgende Vorschriften:

a) Man suche alle Auflösungen der unbestimmten Gleichung $p + 2q + 3r + 4s + \text{etc} = n$, die in ganzen und bejahten Zahlen möglich sind;

b) Für jede der gefundenen Auflösungen berechne man den Bruch $\frac{n'}{p'\,q'\ldots \times 1^p\,2^q\ldots}$;

c) Man addire alle diese Brüche zusammen, welches hier durch das vorgesetzte $\int$ angedeutet wird. Ihre Summe wird das gesuchte allgemeine Glied $\mathcal{N}$ seyn.

V. Aufgabe.

Es ist gegeben $\frac{dy}{dx} = p$; $\frac{dp}{dx} = 2q$; $\frac{dq}{dx} = 3r$; etc

Es wird gesucht $\frac{dx}{dy} = P$; $\frac{dP}{dy} = 2Q$; $\frac{dQ}{dy} = 3R$; etc

Sowohl p, q, r, s, etc als P, Q, R, S, etc sind Funktionen von x, nicht von y.

Auflösung. Es ist für den Differentiationsgrad n, das allgemeine Glied der letztern Reihe, oder

$$\frac{d^n x}{1.2.3.4\ldots n dy^n} = \int \pm \frac{n+1.n+2\ldots a-1}{\beta' \gamma' \delta' \text{ etc}} p^{-a} q^{\beta} r^{\gamma} s^{\delta} \text{ etc}$$

Wobey

1) Die Exponenten $\beta, \gamma, \delta \ldots$ der unbestimmten Gleichung $\beta + 2\gamma + 3\delta + 4\varepsilon + \text{etc} = n-1$ in ganzen und bejahten Zahlen Genüge thun müssen

2) $a = n + \beta + \gamma + \delta + \text{etc}$ gesetzt ist, und $\beta', \gamma', \delta', \varepsilon'$, etc in ähnlicher Bedeutung, wie p', q', r', s', etc (S. 102, 2) genommen werden,

3) das obere Zeichen + für ein bejahtes $\beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \text{etc}$, das untere — hingegen, für ein verneintes $\beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \text{etc}$ gültig ist.

2. Anmerk. Diese Aufgabe (die hier blos als Beyspiel aufgestellt ist, denn es giebt der Aufgaben aus dieser Classe noch viel mehrere) ist sehr weit umfassend. Sie begreift nicht weniger, als: die Auflösung aller nur immer gedenkbaren algebraischen und transcendentischen Gleichungen, in unendliche Reihen, wo jedesmal das allgemeine Gesetz der Coefficienten, mit Beyhülfe der Combinationslehre gegeben ist, und in combinatorischen Zeichen sich darstellen läßt.

VI. Erklärung.

1. Es sey Y eine Funktion von y, und dieses letztere y wieder eine Function einer andern veränderlichen Größe x, und folglich auch Y eine minder gegebene, wenigstens mehr verwickelte Funktion von x;

Ferner sey $\frac{dY}{dy} = \overset{1}{Y}$; $\frac{dy}{dx} = p$; $\frac{dY}{dx} = P$

$$\frac{d\overset{1}{Y}}{dy} = 2\overset{2}{Y};\quad \frac{dp}{dx} = 2q;\quad \frac{dP}{dx} = 2Q$$

$$\frac{d\overset{2}{Y}}{dy} = 3\overset{3}{Y};\quad \frac{dq}{dx} = 3r;\quad \frac{dQ}{dx} = 3R$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{d\overset{n-1}{Y}}{dy} = n\overset{n}{Y};\quad \frac{d\psi}{dx} = n\omega;\quad \frac{d\Psi}{dx} = n\Omega \text{ q)}$$

Aufgabe.

2. Die beiden ersten Reihen $\overset{1}{Y}, \overset{2}{Y}, \overset{3}{Y}, \overset{4}{Y} \ldots, \overset{n}{Y}$ und $p, q, r, s \ldots \omega$ werden als gegeben voraus gesetzt; man sucht die Glieder der dritten, $P, Q, R, S \ldots \Omega$.

Auflösung. Die Differentiation, in Verbindung der auf p, q, r, s... sich beziehenden Combinationsclassen ^mA, ^mB, ^mC, ^mD, ... mit den zugehörigen Polynomialcoefficienten a, b, c, d, ... giebt

q) Die Glieder $\overset{1}{Y}, \overset{2}{Y}, \overset{3}{Y} \ldots, \overset{n}{Y}$, in einer nach oben stehendem Gesetze bestimmten Folge, sind hier mit Beyhülfe der Distanzexponenten ausgedrückt. So hätten auch die Glieder der beiden andern Reihen, sämtlich durch p und P ausgedrückt werden können. Es ist aber, wegen der in den vorigen Aufgaben schon gebrauchten Buchstaben p, q, r, s.. besser, sie hier beyzubehalten; und so sind ω und Ω hier nte Glieder.

$$P = a^1 A \overset{1}{Y}$$

$$Q = a^2 A \overset{1}{Y} + b^2 B \overset{2}{Y}$$

$$R = a^3 A \overset{1}{Y} + b^3 B \overset{2}{Y} + c^3 C \overset{3}{Y}$$

$$S = a^4 A \overset{1}{Y} + b^4 B \overset{2}{Y} + c^4 C \overset{3}{Y} + d^4 D \overset{4}{Y}$$

$$T = a^5 A \overset{1}{Y} + b^5 B \overset{2}{Y} + c^5 C \overset{3}{Y} + d^5 D \overset{4}{Y} + e^5 E \overset{5}{Y}$$

&c &c &c &c &c &c &c

$$\Omega = a^n A \overset{1}{Y} + b^n B \overset{2}{Y} + c^n C \overset{3}{Y} + d^n D \overset{4}{Y} + e^n E \overset{5}{Y} + \&c$$

$$\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 & \ldots & n \\ p, & q, & r, & s, & t, & u & \ldots & \omega \end{matrix}\right)$$

3. Das combinatorisch ausgedrückte Fortgangsgesetz fällt in die Augen, wie auch, daß man auf diesem Wege jedes Glied, unabhängig von den vorhergehenden, außer der Ordnung, nachsuchen, und mit Beyhülfe des hier (am Ende in 2) beygefügten Zeigers darstellen kann.

4. Eine Tafel der $a^m A$, $b^m B$, $c^m C$, u. s. w. für die Elemente $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ hat Herr Prof. Hindenburg (Infin. Dign. p. 167. Tab. V. auch Nov. Syst. Perm. etc p. LIX. Tab. III.) gegeben. Man kann also, noch kürzer, die Werthe der dortigen Combinationsclassen mit ihren Zahlencoefficienten, nur abschreiben, wobey man aber

für $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta \ldots$
hier $p, q, r, s, t, u \ldots$

setzen muß.

5. So findet man die gesuchten Glieder der obigen dritten Reihe, durch $p, q, r, s \ldots$ ausgedrückt, wie folget:

$$P = p \overset{1}{Y}$$

$$Q = q \overset{1}{Y} + p^2 \overset{2}{Y}$$

$$R = r\overset{1}{Y} + 2pq\overset{2}{Y} + p^3\overset{3}{Y}$$

$$S = s\overset{1}{Y} + (2pr + q^2)\overset{2}{Y} + 3p^2q\overset{3}{Y} + p^4\overset{4}{Y}$$

$$T = t\overset{1}{Y} + (2ps + 2qr)\overset{2}{Y} + (3p^2r + 3pq^2)\overset{3}{Y}$$
$$+ 4p^3q\overset{4}{Y} + p^5\overset{5}{Y}$$

$$U = u\overset{1}{Y} + (2pt + 2qs + rr)\overset{2}{Y} + (3p^2s + 6pqr + q^3)\overset{3}{Y}$$
$$+ (4p^3r + 6p^2q^2)\overset{4}{Y} + 5p^4q\overset{5}{Y} + p^6\overset{6}{Y}$$

$$V = v\overset{1}{Y} + (2pu + 2qt + 2rs)\overset{2}{Y} + (3p^2t + 6pqs$$
$$+ 3pr^2 + 3q^2r)\overset{3}{Y} + (4p^3s + 12p^2qr + 4pq^3)\overset{4}{Y}$$
$$+ (5p^4r + 10p^3q^2)\overset{5}{Y} + 6p^5q\overset{6}{Y} + p^7\overset{7}{Y}$$

&c &c &c &c &c

$\Omega =$ (Man sehe den folgenden Abschnitt.)

6. Es ist demnach allgemein $\Omega = \int K.(p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\delta t^\varepsilon \ldots)\overset{m}{Y}$; wobey die unbestimmte Gleichung zum Grunde liegt, $\alpha + 2\beta + 3\gamma + 4\delta + \text{etc} = n$, und $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc} = m$. Der Factor K ist die **Versetzungszahl** oder der **Polynomialcoefficient** von $p^\alpha\ q^\beta\ r^\gamma\ s^\delta\ t^\varepsilon \ldots$ ohne alle Rücksicht auf $\overset{m}{Y}$.

7. Die hier gelehrte Auflösung führt überhaupt dazu: „Wenn y durch eine unendliche Reihe von x gegeben „ist, und Y jede algebraische oder transcendentische Funk„tion von y vorstellt, auch diese Funktion Y durch eine un„endliche Reihe $Ax^r + Bx^{r+d}\ Cx^{r+2d} + Dx^{r+3d} + \text{etc}$ „auszudrücken." Die Potenzen und Logarithmen des Infinitinomiums sind äußerst leichte und beschränkte Corollarien davon. Für jeden besondern Fall der allgemeinen Aufgabe erhält man zugleich die vollständige Auflösung einer Equation aux differences finies, vermittelst der Combinationslehre.

Schlußerinnerung des Herausgebers.

1. So viel vor itzt von Herrn D. Kramp's combinatorisch-analytischen Auflösungen verschiedener, zum Theil sehr wichtiger und vielumfassender Aufgaben. Man kann daraus schon sehen, was man sich in dem Fache von diesem vortreflichen Analysten zu versprechen hat. Einige andere Aufgaben von ihm, die hier nicht Platz finden konnten, ein andermal — im mathematischen Archive.

2. Unter den übersendeten combinatorisch-analytisch-behandelten Aufgaben, war die vom Coefficienten des allgemeinen Gliedes der Potenz eines Infinitinomiums (S. 102, 4) die erste; auch ist sie, nebst dem allgemeinen Produktenprobleme, die Basis der combinatorischen Analysis, und beide zeigen das Unterscheidende des Combinationsverfahrens vor andern am deutlichsten. Ich habe daher diese beiden Probleme, die in der Folge sehr häufig angewendet werden, vor allen andern zuerst in Ordnung gebracht und ausgeführt (Infin. Dign. §. XXI, XXVII u. f. Nov. Syst. Perm. p. LIV, LXIX u. f.).

3. Herr D. Kramp hat bey seiner Lage, von allen gelehrten Hülfsmitteln entblößt, erst später erfahren, daß der von ihm gefundene Hülfssatz (S. 102, 2) schon Jacob Bernoulli'n Opp. T. II. p. 995, 996.) bekannt gewesen. Dieser hat ihn auch bereits (S. 998.) auf eine Reihe wie $\alpha x + \beta x^3 + \gamma x^6 + \delta x^{10} +$ etc (wo die Exponenten nicht nach einem gemeinschaftlichen Unterschiede d fortgehen) erstreckt; freylich noch mit der Unvollständigkeit, daß er es auf den Erfolg ankommen ließ (Bernoulli's Exempel, nach seiner ersten Methode ausgeführt, habe ich auch Infin. Dign. p. 42, 43 beygebracht) wie einerley hier und da zerstreute Potenzen sich einfinden und gliederweise zusammen nehmen ließen. Dieser so großen Unvollkommenheit, bey solchen Reihen, wo

die Exponenten nach willkührlichen Sprüngen wachsen oder abnehmen, hat Hr. D. Kramp durch sein methodisches Verfahren, wodurch er die Schwierigkeit auf die Auflösung eines unbestimmten combinatorisch-analytischen Problems zurück geführt hat, abgeholfen.

4. Es kann meinen Lesern, und selbst auch Herrn D. Kramp nicht anders als angenehm seyn, zu erfahren, daß schon de Moivre die Nothwendigkeit einer solchen Reduktion eingesehen hat. Ich will seine Aeußerung hierüber, mit seinen eigenen Worten anführen. Er spricht von Quotienten, den die Einheit durch eine Reihe dividirt giebt (von den Gliedern der Potenz — 1 dieser Reihe) und sagt ausdrücklich im 3ten Zusatze zu seinem Hauptheorem, der Erhebung eines Polynoms zu einer verlangten Dignität — Si in Quotiente oriundo ex Diuisione Vnitatis per Multinomium quodlibet, exempli gratia, Quadrinomium $1 - bz - cz^2 - dz^3$, requirantur producta omnia literalia sub eadem potestate z^l ordinanda, ea obtineri poterunt ope *Methodi, qua soluuntur quaestiones de Numeris integris*; etenim *inuentis tribus numeris* x, y, z, *quorum primus si multiplicetur per* 1, *secundus per* 2, *tertius per* 3; *producti numeri omnes, siue sigillatim sumti, siue bini, siue terni, semper conficiant summam* l, *et conuertantur valores integri quantitatum* x, y, z, *in respectiuos indices quantitatum* b, c, d, *et pro summis quantitatum* x, 2 y, 3 z, *quoquo modo sumtis, scribantur producta quantitatum respondentium cum indicibus suis propriis, producta haec omnia simul sumta, ea ipsa erunt quae requirebantur*: et eodem modo procedere licet ad quinquinomium, si adhibeatur *noua litera* v, per *numerum* 4 *multiplicanda*, et sic *deinceps* in *infinitum*. Misc. Anal. p. 90. Coroll. III.

5. Das Verfahren (*Methodus*) von welchem de Moivre hier spricht, soll nemlich die Zahlen z, y, x, ..:

aus den beyden Gleichungen: $z + y + x +$ etc $= a$ und $\alpha z + \beta y + \gamma x +$ etc $= b$ bestimmen, noch mit der Einschränkung, daß $z, y, x \ldots$ ganze, positive Zahlen seyn sollen. Das führt also auf die sogenannte Regel Coeci, die, wie die Auflösung (S. 103, 7) nachweiset, die man dabei anwendet, zur unbestimmten combinatorischen Analytik gehört; davon ich bereits im Magazine für reine und angewandte Mathematik (1786. S. 281 — 324.) eine ausführliche sich weit erstreckende Probe gegeben habe. Mehrere Anwendungen dieser Regel in Eulers unbestimmter Analytik Cap. 3. S. 248 u. f. Sehr allgemein und ausführlich hat auch Herr Hofr. Kästner (Fortsetzung der Rechenk. S. 529 u. f.) von ihr gehandelt. Man vergleiche Ebendas. S. 371 u. f.

6. Herrn D. Kramps Verfahren, den gesuchten Coefficienten zu bestimmen, ist also vorzüglich da zu gebrauchen, wo die Exponenten der veränderlichen Größe in der Reihe sprungweise (nach Willkühr) fortgehen. Auf einen solchen Fall, habe ich bereits erinnert (Arch. Heft 4. S. 410, 32) sey die Boscovichsche Zusammensetzung der einzelnen Exponenten zu einer bestimmten Summe vorzüglich bequem, habe solches auch (S. 415, 38) durch ein Beyspiel erläutert. Ist aber diese Summe, wie im Exempel bey Herrn D. Kramp (S. 103, 6) eine große Zahl, so würde man ihre Zusammensetzung nicht so bequem nach der Boscovichschen als Krampischen Art finden. Sonst aber, und überhaupt für den Fall, daß die Exponenten in der gegebenen Reihe nach einer arithmetischen Progression auf einander folgen, welches freylich am häufigsten vorkommt, bleibt es bey der unmittelbaren Anwendung der nun schon längst bekannten Involutionen. Das Maximum der Bequemlichkeit ist nemlich hier mit dem Minimum der Arbeit aufs innigste verbunden.

7. Das Zeichen $\int$ der Krampischen Summirung (S. 103 u. a.) auch das allgemeine Polynomial-coefficientenzeichen K (S. 102) mit einem Punkt vor dem Litteralprodukte, dessen Polynomialcoefficient gefordert wird; beide stimmen gut mit meinen übrigen Zeichen.

Auch ich habe zuweilen, die Summe mehrerer zusammengehöriger Theile (einzelner Complexionen) anzudeuten, mich des Zeichens $\int$ bedient (*Infinit. Dign. p.* 21. *not.*); und eben so hat neuerlich Herr Professor Klügel die Summe aller ähnlichen Verbindungen, z. B. aller b, c, d ... durch $\int$. b; aller bc, bd, cd, ... durch $\int$. bc, u. s. w. (hier S. 66, 67.) bezeichnet. Daß man das Krampische K mit meinem $\varkappa$ verwechseln werde, ist nicht zu befürchten. Mein Coefficientenzeichen $\varkappa$ mit einer beygefügten Zahl n oder (n+1), ist ganz etwas anders — ein Lokalzeichen, welches jenes K gewöhnlich in sich begreift. K ist der allgemeine Ausdruck für meine a, b, c, d ...., die sich auf bestimmte Mengen der Factoren des Literalprodukts beziehen; mein n für n Factoren. Man könnte übrigens, noch näher oder vielmehr ganz bey der Analogie zu bleiben, $\mathfrak{k}$ in eben dem Umfange wie K, für den allgemeinen Polynomialcoefficienten und eben so auch ${}^m\mathfrak{K}$ für den allgemeinen Binomialcoefficienten vom Exponenten m nehmen. In dem Falle würde man z. B. in den combinatorisch-analytischen Formeln (Arch. d. Math. Heft 4. S. 397, 414) das dortige ${}^m\overset{*-1}{\mathfrak{A}a}$ mit ${}^m\mathfrak{K}\mathfrak{k}$ verwechseln. Doch ist das erstere vorzüglicher, weil das ${}^m\mathfrak{K}\mathfrak{k}$ hier noch eine kleine wörtliche Nachweisung nöthig machen würde, die bey der andern Bezeichnung wegfällt; denn die successive Bestimmung des Sternchens in a^{m-*}, führt die augenblickliche Interpretation von dem nebenstehenden $\overset{*-1}{\mathfrak{A}a}$ gleich bey sich.

Um die Formeln, welche die Auflösung enthalten, noch darstellender zu machen, darf man nur bey Ausdrücken, dergleichen oben mehrere vorgekommen sind, (wie der S. 117, 6), in die Stelle, wo ich die zu bearbeitenden Elemente oder auch den Zeiger beyzufügen pflege, die Bedingungsgleichungen setzen, z. B.

$$\Omega = \int K. \, (p^{\alpha}\, q^{\beta}\, r^{\gamma}\, s^{\delta}\, t^{\epsilon} \ldots) \overset{-}{Y}$$

$$\left(\begin{matrix} \alpha + \beta + \gamma + \delta + \&c = m \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma + 4\delta + \&c = n \end{matrix}\right)$$

H.

IV.

Sätze über Potenzen und Produkte gewisser Reihen;

von

J. F. Pfaff,
Professor der Mathematik zu Helmstädt.

Vorerinnerung des Herausgebers.

Hier wäre eigentlich der Ort, wo ich die auf dem Titel angegebene neue Bearbeitung des Polynomialtheorems von mir aufstellen könnte; da aber der Inhalt dieser ganzen Schrift eben so sehr der Anwendung der combinatorisch-behandelten, allgemeinen Potenzen- und Produktenprobleme auf die Reihen, als ihrer Begründung gewidmet ist, bey welcher letztern es doch nur eigentlich darauf ankommt, zu zeigen, wie innigst genau sie mit den Combinationen zusammen hängen, und daß man durch diese, auf dem leichtesten Wege (dem Wege der Natur) zu jenen gelangt — so glaube ich wird es besser seyn, die fremden Abhandlungen beysammen zu lassen, und mit der meinigen den Beschluß zu machen.

Wie genau Herr Prof. Pfaff sich mit der combinatorisch-analytischen Methode bekannt gemacht hat, und wie tief er in den Geist derselben eingedrungen ist, kann den Lesern des ersten Bandes des mathematischen Archivs nicht unbekannt seyn. Er sucht, eben so wie Herr D. Kramp, den höhern Calcul mit der Combinationslehre

in Verbindung zu setzen, und hat sich dazu vornehmlich meiner Lokalausdrücke für Coefficienten von Potenzen, Produkten und Quotienten der Reihen mit großem Vortheile bedient — immer unter der sehr wahren Voraussetzung, daß die Werthe solcher Zeichen durch combinatorische Behandlung auf dem leichtesten Wege gegeben seyen. Dahin gehört auch diese und die folgende Abhandlung, worinn sogleich in der ersten Anmerkung ein ausführliches Urtheil, *cum rationibus*, über diese meine Lokalausdrücke und Formeln beygebracht ist. Um dieses für mehrere Leser — die in demselben Falle mit H. Pf. gewesen oder noch sind — ganz belehrend zu machen, will ich eine Stelle aus dem Briefe dieses vortreflichen Analysten, worinn er mir die Abhandlungen zusendete (vom 10 März 1795) hier beyfügen:

—„Ich denke, diese Aufsätze werden wenigstens den „Nutzen nicht verfehlen, die Ueberzeugung von der Wich„tigkeit Ihrer Lokalformeln mehr zu verbreiten. Wer sie „liest, wird doch dadurch eine Fertigkeit in Verständniß „und Gebrauch solcher Formeln erlangen müssen. Ich „habe an Andern erfahren, daß diese Fertigkeit nicht immer „leicht erworben wird; und von mir selbst muß ich aufrich„tig bekennen, daß ich anfangs weniger von der Sache hielt, „als itzt, und solche Zeichen, wie $p\varkappa n$, $p^m\varkappa(n+1)$, sogar „für unzweckmäßig und überflüssig ansah. Der in folgendem „Abschnitte (in den Bemerkungen über eine besondere „Art von Gleichungen, nebst Beyspielen von ihrer Auf„lösung) angegebene Gesichtspunkt scheint mir wirklich „fruchtbar zu seyn — der Aufsatz ist freylich nur flüchti„ger Entwurf der Gedanken, die sich erst, während des „Gebrauchs der Lokalzeichen, bey mir entwickelt haben. „Indessen habe ich doch geglaubt, es sey besser, ihn auch „in dieser Gestalt bekannt zu machen, als noch länger daran „zu feilen. — Je weiter man in der Analysis fortschrei-

„tet, desto mehr wird man finden, daß die gemeinen arith„metischen, in der Analysis universalisicirten, Operatio„nen nicht immer zureichen." —

Bey allen folgenden Untersuchungen ist vorausgesetzt worden: Wenn die Coefficienten der Reihen p und q gegeben sind, so sind auch die Coefficienten von p^m, q^μ, $p^m q^\mu$, $\frac{p^m}{q^\mu}$ gegeben; oder $p^m \varkappa(n+1)$, $q^\mu \varkappa(n+1)$, $(p^m q^\mu)\varkappa(n+1)$, $\left(\frac{p^m}{q^\mu}\right)\varkappa(n+1)$, sind durch $p\varkappa(n+1)$ und $q\varkappa(n+1)$ bestimmt; auch nimmt Herr Prof. Pfaff dabey an, meine combinatorischen Formeln, welche die Werthe jener Lokalformeln darstellen und ausdrücken, seyen dem Leser bekannt, der von seinen in jenen Formeln dargestellten Sätzen Gebrauch machen will.

Hindenburg.

---

1. Satz. Wenn die Coefficienten zweyer Reihen p und q das Verhalten gegen einander haben, daß für jedes n, $p\varkappa(n+1) = \frac{f}{f+nd} q^{+nd} \varkappa(n+1)$ *), so ist

*) In Worten ausgedrückt, würde die Bedingung des Satzes so lauten: q und p seyen zwey Reihen: z. B.

$$q = \alpha + \overset{1}{\alpha} x + \overset{2}{\alpha} x^2 + \ldots + \overset{n}{\alpha} x^n + \ldots$$

$$p = a + \overset{1}{a} x + \overset{2}{a} x^2 \ldots + \overset{n}{a} x^n + \ldots$$

Man erhebe die erste auf die (f+nd)te Potenz (wo n eine ganze Zahl bedeutet), und es sei $q^{f+nd} = \mathfrak{A} + \overset{1}{\mathfrak{A}} x + \overset{2}{\mathfrak{A}} x^2 \ldots + \overset{n}{\mathfrak{A}} x^n + \ldots$ so werden die Coefficienten der andern Reihe p so angenommen, daß für jedes n dann $\overset{n}{a} = \frac{f}{f+nd} \cdot \overset{n}{\mathfrak{A}}$. Es ist nehmlich $\overset{n}{a}$ der

auch für alle Exponenten m, $p^m \varkappa (n+1) = \frac{mf}{mf+nd} q^{mf+nd} \varkappa (n+1)$.

Beweis. Man nehme für q folgende Reihe an:

$$q = Ay^{-1} + By^{-1+d} + Cy^{-1+2d} + \text{etc}$$

(wo also A, B, C ... = $q\varkappa 1$, $q\varkappa 2$, $q\varkappa 3$ u.s.w.) so ist nach der Reversionsformel (Arch. 1 H. S. 87 das dortige $p = -1$ gesetzt) $y^f \varkappa (n+1) = \frac{f}{f+nd} q^{f+nd} \varkappa (n+1)$, also $y^f \varkappa (n+1) = p \varkappa (n+1)$. Man kann daher $p = y^f$ setzen. Aber zugleich ist, auch nach der erwähnten Formel, $y^{mf} \varkappa (n+1) = \frac{mf}{mf+nd} q^{mf+nd} \varkappa (n+1)$. Folglich muß, da $y^{mf} = p^m$, auch $p^m \varkappa (n+1) = \frac{mf}{mf+nd} q^{mf+nd} \varkappa (n+1)$ seyn. Diese Gleichung ist zwar

(n+1)te Coefficient der Reihe p, d. i. $p\varkappa(n+1)$, und $\overset{n}{A}$ der eben sovielte von q^{f+nd}, d. i. $q^{f+nd}\varkappa(n+1)$. Man sieht leicht, wie sehr durch diese Hindenburgische Bezeichnung die Ausdrücke abgekürzt werden. Aber auch die Schlüsse bey den Beweisen werden einfacher durch den Gebrauch dieses Coefficienten-Zeichens, das daher bey manchen sehr verwickelten Untersuchungen über Reihen nicht ohne Nachtheil entbehrt werden kann, so unzweckmäßig der unbedingt allgemeine Gebrauch desselben in andern Fällen seyn würde. Solche Zeichen gewähren, außer der Abkürzung des Vortrags und der Erleichterung des Nachdenkens, auch den wesentlichen Vortheil, daß sie Untersuchungen veranlassen, an die man sonst nicht so leicht gedacht hätte. Die Mathematik hat bisher das Glück gehabt, daß bey ihr immer nützliche und verständliche Zeichen geltend geworden sind. Es ist zu hoffen, daß auch künftig weder übel gewählte noch überflüssige Zeichen eingeführt werden mögen, woraus nur Verwirrung entstehen würde. — Des erwähnten Hindenburgischen Coefficienten-Zeichens hat sich insbesondere H. M. Rothe mit vielem Vortheile bedient, in seiner lehrreichen und gründlichen Abhandlung (*de serier. revers.*), deren Vergleichung mit gegenwärtigen Aufsätzen, was darin durch Kürze einigermaßen dunkel seyn möchte, hinlänglich erläutern wird. P.

unter der Voraussetzung bestimmter Exponenten bey den Reihen q und p hergeleitet worden. Sie muß aber nun allgemeingültig seyn, da die Coefficienten nicht von den Exponenten abhängen (eben so wenig als von den veränderlichen Grössen, nach deren Potenzen mit Exponenten von gleichem Unterschiede die Glieder fortgehen).

2. Zusatz. Es ist also

$$\left(\frac{f}{f}.q^{f}\varkappa 1.x^{\alpha}+\frac{f}{f+d}q^{f+d}\varkappa 2.x^{\alpha+\beta}+\frac{f}{f+2d}q^{f+2d}\varkappa 3.x^{\alpha+2\beta}+\ldots\right)$$

$$=\frac{mf}{mf}q^{mf}\varkappa 1.x^{m\alpha}+\frac{mf}{mf+d}q^{mf+d}\varkappa 2.x^{m\alpha+\beta}+\frac{mf}{mf+2d}q^{mf+2d}\varkappa 3.x^{m\alpha+2\beta}+\ldots$$

Die Potenzen unendlicher Reihen von dieser Art lassen sich demnach durch Ausdrücke darstellen, welche im analytischen Sinne sehr einfach sind. So ist z. B. für $\alpha=\beta=f=d=1$,

$$(q\varkappa 1.x+\tfrac{1}{2}q^{2}\varkappa 2.x^{2}+\tfrac{1}{3}q^{3}\varkappa 3.x^{3}+\tfrac{1}{4}q^{4}\varkappa 4.x^{4}+\ldots)^{m}$$

$$=q^{m}\varkappa 1.x^{m}+\frac{m}{m+1}.q^{m+1}\varkappa 2.x^{m+1}+\frac{m}{m+2}q^{m+2}\varkappa 3.x^{m+2}+\text{etc}$$

wo für m auch gebrochene und verneinte Zahlen genommen werden können.

3. Zusatz.

Wenn $p^{\mu}\varkappa(n+1)=\frac{f}{f+nd}q^{f+nd}\varkappa(n+1)$,

so ist $p^{m}\varkappa(n+1)=\frac{mf}{mf+n\mu d}q^{\frac{nf+n\mu d}{\mu}}\varkappa(n+1)$.

Setzt man nemlich $p^{\mu}=\pi$, so ist

$\pi\varkappa(n+1)=\frac{f}{f+nd}q^{f+nd}\varkappa(n+1)$, also (nach 1.)

$$\pi^{\frac{m}{\mu}}\varkappa(n+1)=p^{m}\varkappa(n+1)=\frac{\frac{m}{\mu}f}{\frac{m}{\mu}f+nd}.q^{\frac{m}{\mu}f+nd}\varkappa(n+1)$$

4. Zusatz.

Wenn $p^{\mu} \varkappa (n+1) = \frac{h}{f+nd} q^{\frac{f+nd}{e}} \varkappa (n+1)$

so ist $p^{m} \varkappa (n+1) = \left(\frac{h}{f}\right)^{\frac{m}{\mu}} \cdot \frac{mf}{mf+nd\mu} \cdot q^{\frac{mf+nd\mu}{e\mu}} \varkappa (n+1)$.

Aus der angenommenen Gleichung folgt nemlich

$$\frac{f}{h} \cdot p^{\mu} \varkappa (n+1) = \frac{f}{f+nd} q^{\frac{f+nd}{e}} \varkappa (n+1).$$

Nun sey $q^{\frac{1}{e}} = Q$, $\frac{f}{h} p^{\mu} = \pi$,

so wird $\pi \varkappa (n+1) = \frac{f}{f+nd} Q^{f+nd} \varkappa (n+1)$,

folglich (nach 1) $\pi^{\frac{m}{\mu}} \varkappa (n+1) = \frac{\frac{m}{\mu} f}{\frac{m}{\mu} f + nd} \cdot Q^{\frac{m}{\mu} f + nd} \varkappa (n+1)$,

*) und $p^{m} \varkappa (n+1) = \left(\frac{f}{h}\right)^{\frac{m}{\mu}} \frac{\frac{m}{\mu} f}{\frac{m}{\mu} f + nd} \cdot q^{\frac{\frac{m}{\mu} f + nd}{e}} \varkappa (n+1)$.

5. Satz. Wenn für eine beliebige Anzahl von Reihen p, p', p'', p''' ... folgende Gleichungen statt finden:

$$p \varkappa (n+1) = \frac{f}{f+nd} q^{f+nd} \varkappa (n+1),$$

$$p' \varkappa (n+1) = \frac{f'}{f+nd} q^{f+nd} \varkappa (n+1),$$

*) Daß, wenn a eine beständige Größe bedeutet, $(aP) \varkappa (n+1) = a . P \varkappa (n+1)$, ist für sich klar. P.

$$p'' \varkappa(n+1) = \frac{f''}{f''+nd} q^{f''+nd} \varkappa(n+1),$$

etc . . .

so ist $(pp'p''\ldots)\varkappa(n+1) = \frac{f+f'+f''\ldots}{f+f'+f''\ldots+nd} \cdot q^{f+f'+f''\ldots+nd} \varkappa(n+1)$.

Beweis. Aus der ersten Gleichung folgt:

$$p^{f'} \varkappa(n+1) = \frac{ff'}{ff'+nd} q^{ff'+nd} \varkappa(n+1) \text{ (nach 1)}$$

aus der zweyten, $(p')^f \varkappa(n+1) = \frac{f'f}{f'f+nd} q^{f'f+nd} \varkappa(n+1)$, folglich ist $p^{f'} \varkappa(n+1) = (p')^f \varkappa(n+1)$.

Man kann daher $p^{f'} = (p')^f$ setzen, oder $p' = p^{\frac{f'}{f}}$. Aus eben dem Grunde darf man auch folgende Gleichungen annehmen: $p'' = p^{\frac{f''}{f}}$, $p''' = p^{\frac{f'''}{f}}$ u. s. w. Nun wird also das Produkt $pp'p''\ldots = p.p^{\frac{f'}{f}}.p^{\frac{f''}{f}}\ldots = p^{\frac{f+f'+f''\ldots}{f}}$; Folglich, (in 6) für m gesetzt $\frac{f+f'+f''\ldots}{f}$; $(pp'p''\ldots)\varkappa(n+1)$

$$= \frac{f+f'+f''\ldots}{f+f'+f''\ldots+nd} \cdot q^{f+f'+f''\ldots+nd} \varkappa(n+1).$$

6. **Satz.** Unter den Voraussetzungen des vorigen Satzes ist $p^m.(p')^{m'}.(p'')^{m''}\ldots\varkappa(n+1)$

$$= \frac{mf+m'f'+m''f''\ldots}{mf+m'f'+m''f''\ldots+nd} \cdot q^{mf+m'f'+m''f''\ldots+nd} \varkappa(n+1).$$

Beweis. Nach den Gründen des vorigen Beweises kann das Produkt $p^m.(p')^{m'}.(p'')^{m''}\ldots$ $= p^{\frac{mf+m'f'+m''f''\ldots}{f}}$ gesetzt werden, und so folgt die

J,

Gleichung des gegenwärtigen Satzes aus (1), wenn man für das dortige m hier $\frac{mf+m'f'+m''f''\ldots}{f}$ setzt.

7. Zusatz. Die Produkte aus solchen Reihen, als hier betrachtet werden, und ihren Potenzen, lassen sich demnach analytisch einfach darstellen. Es ist nemlich:

$$\left(\frac{f}{f}q^{f}\varkappa 1.x^{\alpha}+\frac{f}{f+d}q^{f+d}\varkappa 2.x^{\alpha+\beta}+\frac{f}{f+2d}q^{f+2d}\varkappa 3.x^{\alpha+2\beta}+\ldots\right)^{m}$$

$$\times\left(\frac{f'}{f'}q^{f'}\varkappa 1.x^{\alpha'}+\frac{f'}{f'+d}q^{f'+d}\varkappa 2.x^{\alpha'+\beta}+\frac{f'}{f'+2d}q^{f'+2d}\varkappa 3.x^{\alpha'+2\beta}+\ldots\right)^{m'}$$

$$\times\left(\frac{f''}{f''}q^{f''}\varkappa 1.x^{\alpha''}+\frac{f''}{f''+d}q^{f''+d}\varkappa 2.x^{\alpha''+\beta}+\frac{f''}{f''+2d}q^{f''+2d}\varkappa 3.x^{\alpha''+2\beta}\ldots\right)^{m''}$$

$$\times\text{etc}=\frac{F}{F}q^{F}\varkappa 1.x^{A}+\frac{F}{F+d}q^{F+d}\varkappa 2.x^{A+\beta}+\frac{F}{F+2d}q^{f+2d}\varkappa 3.x^{A+2\beta}\text{ etc.}$$

; wo $F=mf+m'f'+m''f''+m'''f'''\ldots$

und $A=m\alpha+m'\alpha'+m''\alpha''+m'''\alpha'''\ldots$

8. Zusatz. Die Sätze 5. und 6. lassen sich auf eine ähnliche Art allgemeiner machen, wie der in 1. durch die Zusätze 3. u. 4.

Wenn nemlich $p^{\mu}\varkappa(n+1)=\frac{h}{f+nd}\cdot q^{\frac{f+nd}{e}}\varkappa(n+1)$,

$$(p')^{\mu'}\varkappa(n+1)=\frac{h'}{f'+nd}\cdot q^{\frac{f'+nd}{e}}\varkappa(n+1),$$

$$(p'')^{\mu''}\varkappa(n+1)=\frac{h''}{f''+nd}\cdot q^{\frac{f''+nd}{e}}\varkappa(n+1),$$

u. s. w. so ist $(p^m \cdot (p')^{m'} \cdot (p'')^{m''} \ldots) \varkappa (n+1)$

$$= \left(\frac{h}{f}\right)^{\frac{m}{\mu}} \cdot \left(\frac{h'}{f'}\right)^{\frac{m'}{\mu'}} \cdot \left(\frac{h''}{f''}\right)^{\frac{m''}{\mu''}} \ldots \frac{F}{F+nd} \cdot q^{\frac{F+nd}{e}} \varkappa (n+1)$$

wo $F = \frac{m}{\mu} f + \frac{m'}{\mu'} f' + \frac{m''}{\mu''} f'' + \ldots$

Der Beweis folgt aus 6., wenn man $q^{\frac{1}{e}} = Q$, $\frac{f}{g} \cdot p^\mu = \pi$, $\frac{f'}{g'} \cdot (p')^{\mu'} = \pi'$ u. s. w. setzt.

9. Satz.

Wenn $P \varkappa (n+1) = (s+nc)\, q^g \varkappa (n+1)$

$$p \varkappa (n+1) = q^f \varkappa (n+1)$$
$$p' \varkappa (n+1) = q^{f'} \varkappa (n+1)$$
$$p'' \varkappa (n+1) = q^{f''} \varkappa (n+1)$$
&c &c

so ist $(P \cdot p^m \cdot (p')^{m'} \cdot (p'')^{m''} \ldots) \varkappa (n+1)$

$$= \frac{s(g+mf+m'f'+m''f'' \ldots)+ncg}{g+mf+m'f'+m''f'' \ldots} + q^{g+mf+m'f'+m''f'' \ldots} \varkappa (n+1)$$

Beweis. Da die Exponenten willkührlich sind, so nehme man für q^g folgende Reihe an:

$$q^g = q^g \varkappa 1 . x^s + q^g \varkappa 2 . x^{s+c} + q^g \varkappa 3 . x^{s+2c} + \&c$$

so ist $\frac{g . q^{g-1} dq}{dx} = s q^g \varkappa 1 . x^{s-1} + (s+c) q^g \varkappa 2 . x^{s-1+c}$
$+ (s+2c) q^g \varkappa 3 . x^{s-1+2c} + \&c$

Also $\frac{g . q^{g-1} dq}{dx} \varkappa (n+1) = (s+nc) q^g \varkappa (n+1) = P \varkappa (n+1)$

Man darf also $P = \frac{g . q^{g-1} dq}{dx}$ setzen.

Eben so darf man $p = q^f$, $p' = q^{f'}$, $p'' = q^{f''}$ u. s. w. setzen.

Folglich wird $P . p^m . (p')^{m'} . (p'')^{m''} . (p''')^{m'''} \ldots$

$$= \frac{g . q^{g-1+mf+m'f'+m''f''\ldots} . dq}{dx}$$

$$= \frac{g}{G} \frac{d(q^G)}{dx},$$ wenn $g + mf + m'f' + m''f'' \ldots$

$= G$ gesetzt wird. Nun folgt aus der angenommenen Reihe für q^g, $q^G =$

$$q^G \varkappa 1 . x^{\frac{sG}{g}} + q^G \varkappa 2 . x^{\frac{sG}{g}+c} + q^G \varkappa 3 . x^{\frac{sG}{g}+2c} + \&c;$$

folglich $$\frac{d(q^G)}{dx} = \frac{sG}{g} . q^g \varkappa 1 . x^{\frac{sG}{g}-1} + \frac{sG+cg}{g}$$

$$. q^G \varkappa 2 . x^{\frac{sG}{g}+c-1} + \&c.$$

und $$\frac{d(q^G)}{dx} \varkappa (n+1) = \frac{sG+ncg}{g} q^G \varkappa (n+1).$$

Demnach wird $(P . p^m . (p')^{m'} . (p'')^{m''} \ldots) \varkappa (n+1)$

$$= \frac{g}{G} . \frac{dq^s}{dx} \varkappa (n+1) = \frac{sG+ncg}{G} . q^G \varkappa (n+1)$$

10. Zusatz. Es ist demnach

$$(s q^g \varkappa 1 . x^\alpha + (s+c) q^g \varkappa 2 . x^{\alpha+\beta} + (s+2c) q^g \varkappa 3 . x^{\alpha+2\beta} + \ldots)$$

$$\times (q^f \varkappa 1 . x^\alpha + q^f \varkappa 2 . x^{\alpha+\beta} + q^f \varkappa 3 . x^{\alpha+2\beta} + \ldots)^m$$

$$\times (q^{f'} \varkappa 1 . x^{\alpha'} + q^{f'} \varkappa 2 . x^{\alpha'+\beta} + q^{f'} \varkappa 3 . x^{\alpha'+2\beta} + \ldots)^{m'}$$

$$\times (q^{f''} \varkappa 1 . x^{\alpha''} + q^{f''} \varkappa 2 . x^{\alpha''+\beta} + q^{f''} \varkappa 3 . x^{\alpha''+2\beta} + \ldots)^{m''}$$

$$\times \&c = \frac{1}{G} (s G q^G \varkappa 1 . x^{\mathfrak{A}} + (sG+cg) q^G \varkappa 2 . x^{\mathfrak{A}+\beta} + (sG+2cg) q^G \varkappa 3 . x^{\mathfrak{A}+2\beta} + \&c)$$

wenn $G = g + mf + m'f' + m''f'' + \ldots$
und $\mathfrak{A} = a + m\alpha + m'\alpha' + m''\alpha'' + \ldots.$

11. Anmerkung. Für zwey Reihen P und p in (9.) und $m = 1$, entspringt aus gegenwärtigem Satze die Formel:

$$s q^g \varkappa 1 . q^f \varkappa (n+1) + (s+c) q^g \varkappa 2 . q^f \varkappa n$$
$$+ (s+2c) q^g \varkappa 3 . q^f \varkappa (n-1) \ldots.$$
$$+ (s+nc) q^g \varkappa (n+1) . q^f \varkappa 1$$
$$= \frac{s(g+f)+ncg}{g+f} . q^{g+f} \varkappa (n+1)$$

(Rothe l. c. §. IV.) worunter auch die bekannte Lokalformel für das Infinitinomium (Kaestner Anal. inf. §. 56.) enthalten ist. Die Art, wie ich hier den Beweis darzustellen versucht habe, scheint mir die Uebersicht der Schlüsse zu vereinfachen. Das leitende Princip bey diesen Untersuchungen ist folgender (bey den bisherigen Beweisen zum Grunde liegende) allgemeine Satz (dessen gegehörige Anwendung speciellere Sätze überflüssig macht): Formeln für Coefficienten, welche unter Annahme gewisser Exponenten erwiesen sind, gelten allgemein, für alle andere Exponenten. Der Grund ist, weil die Coefficienten von Produkten *) und Potenzen der Reihen nicht von den Exponenten (noch auch von der veränderlichen Größe) abhängen. Daraus folgt nothwendig, daß Formeln von der erwähnten Art, wenn sie für eine (arithmetische) Reihe von Exponenten nicht statt fänden, auch für keine andere statt finden könnten. Man darf also für jede besondere (unabhängige, ursprüngliche) Reihe (wie im

*) Bey Produkten aus Reihen werden die Factoren-Reihen nach Potenzen einer veränderlichen Größe mit einem Exponenten-Unterschied fortgehend angenommen. Quotienten sind Produkte in negative Potenzen. P.

Vorhergehenden q, p, p', p''... P) in solchen Formeln die Exponenten nach Belieben auswählen. *) Für Potenzen und Produkte (als abgeleitete, abhängige Reihen) ergeben sich dann die Exponenten von selbst, die nun nicht mehr willkührlich sind, wie z. B. in 9. die Exponenten für q^G aus denen für q^g angenommenen. — Von der Richtigkeit der Behauptung (Rothe l. c. 9.) auf welche sich obiger Satz stützt, kann man sich leicht so überzeugen. Es sey

$$p = Ax^{\alpha} + A'x^{\alpha+d} + A''x^{\alpha+2d} + \ldots$$
$$q = Bx^{\beta} + B'x^{\beta+d} + B''x^{\beta+2d} \ldots$$
$$r = Cx^{\gamma} + C'x^{\gamma+d} + C''x^{\gamma+2d} \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

so ist $p^{\lambda} q^{\mu} r^{\nu} \ldots = x^{\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma\ldots}(A+A'z+A''z^2\ldots)^{\lambda} . (B+B'z+B''z^2\ldots)^{\mu} . (C+C'z+C''z^2\ldots)^{\nu} \ldots$, wo also $x^d = z$ gesetzt wird. Also ist jeder Coefficient von $p^{\lambda} q^{\mu} r^{\nu} \ldots$ wenn für p, q, r ... die allgemeinern Reihen genommen werden, einerley mit dem eben so vielten für $\alpha = 0$, $d = 1$, d. i. für die einfachste Reihe der Exponenten. Durch diese Betrachtung werden solche Untersuchungen einfacher und leichter, weil man nun bey den Reihen von den veränderlichen Größen und den Exponenten abstrahiren kann, und bloß auf die Coefficienten-Reihe Rücksicht zu nehmen hat.

12. Anmerkung. Zu mehrerer Erläuterung solcher Schlüsse, und zu Empfehlung der Vorsicht, mögt folgender Trugschluß dienen: Es sey

$$p\varkappa(n+1) = \frac{f}{f+nd} q^{f+nd} \varkappa(n+1)$$

*) Eben darum ist es hinreichend, bey dem Beweise des Infinitinomial-Satzes die Reihe in ihrer einfachsten Form zu betrachten. (*Kaestner l. c. §. 56. XV. Hindenburg Probl. univers. ad ser. revers. p. 18. not. i*). P.

$$p' \varkappa (n+1) = \frac{f'}{f'+nd} \cdot (q')^{f'+nd} \varkappa (n+1)$$

Man sucht $(pp') \varkappa (n+1)$.

Zu dem Ende werde gesetzt:

$$q = q\varkappa 1 . y^{-1} + q\varkappa 2 . y^{-1+d} + q\varkappa 3 . y^{-1+2d} + \ldots$$

$$q' = q'\varkappa 1 . y^{-1} + q'\varkappa 2 . y^{-1+d} + q'\varkappa 3 . y^{-1+2d} + \ldots$$

so ist $y^f \varkappa (n+1) = \frac{f}{f+nd} q^{f+nd} \varkappa (n+1) = p\varkappa (n+1)$.

Also kann man setzen $p = y^f$; eben so $p' = y^{f'}$. Daraus wird $pp' = y^{f+f'}$, und $pp' \varkappa (n+1)$

$$= \frac{f+f'}{f+f'+nd} \cdot q^{f+f'+nd} \varkappa (n+1)$$

Diese Gleichung ist unrichtig, wie schon daraus erhellet, daß aus eben diesem Grunde folgen würde: $pp' \varkappa (n+1)$ $= \frac{f+f'}{f+f'+nd} \cdot (q')^{f+f'+nd} \varkappa (n+1)$, da doch q und q' verschieden sind.

Es ist alles richtig, bis auf den Schluß $pp' = y^{f+f'}$. Nemlich in der Gleichung $p = y^f$, wird y^f als eine nach Potenzen von q fortgehende Reihe vorausgesetzt: aber $y^{f'}$ $= p'$, ist nach Potenzen von q' ausgedrückt. Also kann man hier nicht schließen $pp' = y^{f+f'}$. Die Factorenreihen haben nicht einerley veränderliche Größe.

13. Satz.

Wenn $P\varkappa (n+1) = \frac{(s+nc)g}{g+nd} \cdot q^{g+nd} \varkappa (n+1)$

$$p\varkappa (n+1) = \frac{f}{f+nd} \cdot q^{f+nd} \varkappa (n+1)$$

$$p' \varkappa (n+1) = \frac{f'}{f'+nd} \cdot q^{f'+nd} \varkappa (n+1)$$

$$p'' \varkappa (n+1) + \frac{f''}{f''+nd} \cdot q^{f''+nd} \varkappa (n+1)$$

&c &c &c

so ist $(P p p' p'' \ldots) \varkappa (n+1)$

$$= \frac{s(g+f+f'+f''\ldots)+ncg}{g+f+f'+f''\ldots+nd} \cdot q^{g+f+f'+f''\ldots+nd} \varkappa (n+1)$$

Beweis. Man setze

$$q = q \varkappa 1 . y^{-1} + q \varkappa 2 . y^{-1+d} + q \varkappa 3 . y^{-1+2d} + \&c$$

so ist $y^g \varkappa (n+1) = \frac{g}{g+nd} \cdot q^{g+nd} \varkappa (n+1)$;

also $P \varkappa (n+1) = (s+nc) y^g \varkappa (n+1)$;

ferner $p \varkappa (n+1) = y^f \varkappa (n+1)$

$$p' \varkappa (n+1) = y^{f'} \varkappa (n+1)$$

$$p'' \varkappa (n+1) = y^{f''} \varkappa (n+1)$$

&c &c &c

Folglich wird, nach 9. $(P p p' p'' \ldots) \varkappa (n+1)$

$$= \frac{sG+ncg}{G} \cdot y^G \varkappa (n+1)$$

$$= \frac{sG+ncg}{G} \cdot \frac{G}{G+nd} \cdot q^{G+nd} \varkappa (n+1)$$

$$= \frac{sG+ncg}{G+nd} \cdot q^{G+nd} \varkappa (n+1),$$

wo $G = g + f + f' + f'' \ldots$

14. Satz. Unter den Voraussetzungen des vorigen Satzes ist:

$$(P p^m (p')^{m'} (p'')^{m''} \ldots) \varkappa (n+1) = \frac{s G + ncg}{G + nd} \cdot q^{G+nd} \varkappa (n+1),$$

$G = g + mf + m'f' + m''f'' + \ldots$ gesetzt.

Beweis. Dieser Satz wird auf eben die Art, wie der vorhergehende, mit Zuziehung von 9. hergeleitet.

15. Zusatz. Es ist also

$$(s q^g \varkappa 1 . x^a + (s+c) \frac{g}{g+d} . q^{g+d} \varkappa 2 . x^{a+\beta}$$

$$+ (s+2c) \frac{g}{g+2d} . q^{g+2d} \varkappa 3 . x^{a+2\beta} + \ldots)$$

$$\times (q^f \varkappa 1 . x^\alpha + \frac{f}{f+d} . q^{f+d} \varkappa 2 . x^{\alpha+\beta}$$

$$+ \frac{f}{f+2d} . q^{f+2d} \varkappa 3 . x^{\alpha+2\beta} + \&c)^m$$

$$\times (q^{f'} \varkappa 1 . x^{\alpha'} + \frac{f'}{f'+d} . q^{f'+d} \varkappa 2 . x^{\alpha'+\beta}$$

$$+ \frac{f'}{f'+2d} . q^{f'+2d} \varkappa 3 . x^{\alpha+2\beta} \ldots)^{m'}$$

$$\times \&c = s q^G \varkappa 1 . x^{\mathfrak{A}} + \frac{s G + cg}{G+d} . q^{G+d} \varkappa 2 . x^{\mathfrak{A}+\beta}$$

$$+ \frac{s G + 2cg}{G + 2d} . q^{G+2d} \varkappa 3 . x^{\mathfrak{A}+2\beta} + \&c,$$

$\mathfrak{A}$ und G wie in (14.) genommen.

16. Zusatz. Ist $s = 1$, $cg = d$, so ist der Coefficient in (14.) $= q^{g+mf+m'f' \ldots + nd} \varkappa (n+1)$, und das Produkt in (15.) $= q^G \varkappa 1 . x^{\mathfrak{A}}$ $+ q^{G+d} \varkappa 2 . x^{\mathfrak{A}+\beta} + q^{G+2d} \varkappa 3 . x^{\mathfrak{A}+2\beta} + \&c.$

17. Zusatz. Aus (14.) fließt auch folgender allgemeine Satz:

Wenn $P^{\lambda} \varkappa (n+1) = \frac{(s+nc)}{g+nd} \gamma . q^{\frac{g+nd}{c}} \varkappa (n+1)$

$$p^{\mu} \varkappa (n+1) = \frac{h}{f+nd} . q^{\frac{f+nd}{c}} \varkappa (n+1)$$

$$(p')^{\mu'} \varkappa (n+1) = \frac{h'}{f'+nd} . q^{\frac{f'+nd}{c}} \varkappa (n+1)$$

$$(p'')^{\mu''} \varkappa (n+1) = \frac{h''}{f''+nd} . q^{\frac{f''+nd}{c}} \varkappa (n+1)$$

&c &c &c

so ist $(P^{\lambda}\, p^{m} . (p')^{m'} . (p'')^{m''} \ldots) \varkappa (n+1)$

$$= \frac{\gamma}{g} . \left(\frac{h}{f}\right)^{\frac{m}{\mu}} . \left(\frac{h'}{f'}\right)^{\frac{m'}{\mu'}} . \left(\frac{h''}{f''}\right)^{\frac{m''}{\mu''}} \ldots$$

$$\left\{\frac{s\left(g + \frac{m}{\mu} f + \frac{m'}{\mu'} f' + \frac{m''}{\mu''} f'' \ldots\right) + ncg}{g + \frac{m}{\mu} f + \frac{m'}{\mu'} f' + \ldots + nd}\right\} q^{g + \frac{m}{\mu} f + nd} \varkappa (n+1)$$

Man darf nur $P^{\lambda}\, g = \Pi$, $\frac{f p^{\mu}}{h} = \pi$, $\frac{f'}{h'} (p')^{\mu'} = \pi' \ldots$

und $q^{\frac{1}{c}} = Q$, auch in (14.) für das dortige m, hier $\frac{m}{\mu}$ setzen.

18. Ableitung der La Grangischen Reversionsformel aus dem ersten Satze.

1. Aus (2) folgt nachstehende Gleichung:

$$p \varkappa 1 . (q \varkappa 1 . u + \tfrac{1}{2} q^2 \varkappa 2 . u^2 + \tfrac{1}{3} q^3 \varkappa 3 . u^3 + \tfrac{1}{4} q^4 \varkappa 4 . u^4 \ldots)$$
$$+ \tfrac{1}{2} p \varkappa 2 . (q \varkappa 1 . u + \tfrac{1}{2} q^2 \varkappa 2 . u^2 + \tfrac{1}{3} q^3 \varkappa 3 . u^3 \ldots)^2$$

$$+\tfrac{1}{3}p\varkappa 3.(q\varkappa 1.u+\tfrac{1}{2}q^2\varkappa 2.u^2+\tfrac{1}{3}q^3\varkappa 3.u^3\ldots.)^3$$
$$=(pq)\varkappa 1.u+\tfrac{1}{2}(pq^2)\varkappa 2.u^2+\tfrac{1}{3}(pq^3)\varkappa 3.u^3$$
$$+\tfrac{1}{4}(pq^4)\varkappa 4.u^4+\&c$$

Man wird sich davon bald überzeugen, wenn man die Reihenpotenzen linker Hand des Gleichheitszeichens nach (2) ausdrückt, und was zu einerley Potenz von u gehört, zusammen nimmt.

2. Nun nehme man folgende beide Scalen an:

$$q\left(\varphi y,\ d\varphi y,\ \frac{d^2\varphi y}{1.2},\ \frac{d^3\varphi y}{1.2.3},\ldots\right)$$

$$p\left(d\psi y,\ d^2\psi y,\ \frac{d^3\psi y}{1.2},\ \frac{d^4\psi y}{1.2.3}\ldots\right),$$

um mich der von H. M. Rothe (l. c. §. 1) gebrauchten Redensart zu bedienen, oder (wie man auch sagen könnte) man gebe den Reihen p und q die beygeschriebenen Coefficienten, so verwandelt sich, mit Zuziehung der von demselben (Archiv II. H. S. 229) erwiesenen Formeln, die Gleichung in (1), wenn noch beiderseits ψy addirt, und $\frac{z}{dy}$ für x, und $\psi' y$ für $\frac{d\psi y}{dy}$ gesetzt wird, in folgende:

$$\psi y+z\varphi y.\psi' y+\frac{z^2 d(\varphi y^2.\psi' y)}{1.2.dy}+\frac{z^3 d^2(\varphi y^3.\psi' y)}{1.2.3.dy^2}+\&c$$

$$=\psi y+\left(z\varphi y+\frac{z^2 d(\varphi y^2)}{1.2.dy}+\frac{z^3 d^2(\varphi y^3)}{1.2.3.dy^2}+\ldots\right)\frac{d\psi y}{dy}$$

$$+\left(z\varphi y+\frac{z^2 d(\varphi y^2)}{1.2.dy}+\frac{z^3 d^2(\varphi y^3)}{1.2.3.dy^2}+\ldots\right)^2\frac{d^2\psi y}{1.2.dy^2}$$

$$+\quad \&c \qquad \&c$$

3. Was rechter Hand des Gleichheitszeichens steht, läßt sich nach dem Taylorischen Satze kurz so ausdrücken:

$$\psi\left(y + z\varphi y + \frac{z^2 d(\varphi y^2)}{1.2.dy} + \frac{z^3 d^2(\varphi y^3)}{1.2.3.dy^2} + \ldots\right)$$

Man setze die Grösse unter dem Funktionalzeichen $= x$, so wird also

$$\psi x = \psi y + z\varphi y . \psi' y + \frac{z^2 d(\varphi y^2 . \psi' y)}{1.2.dy} + \&c$$

4. Daraus folgt, das Zeichen ψ mit φ verwechselt, $\varphi x = \varphi y + \frac{z d(\varphi y^2)}{1.2.dy} + \frac{z^2 d^2(\varphi y^3)}{1.2.3.dy^2} + \&c$

Diese Reihe mit der für x verglichen, giebt $y = x - z\varphi x$, als die Gleichung zwischen den drey veränderlichen Grössen x, y und z.

5. Nun kann man also rückwärts schließen: Wenn diese Gleichung statt findet, so wird jede Funktion der einen unter den drey Größen, x, durch die Reihe in (3) ausgedrückt. So läßt sich die La Grangische Formel beweisen, obgleich nicht finden. Der Beweis kommt darauf an, daß man zeigt, von den beiden Reihen, welche die Formel für x und für ψx giebt, sey letztere Reihe eine Funktion ψ der ersten (woraus dann, ψ mit φ verwechselt, die Gleichung in 4 für x folgt), d. i. daß man die Richtigkeit der Gleichung in (2) darthut. Neben einigen Versuchen, die ich anstellte, ehe ich den Beweis (in I. H. d. Archivs S. 81) erhielt, gerieth ich auf gegenwärtige Beweisart, leitete aber die Gleichung in (2) aus dem Ausdrucke für $d^n(xy)$ her. So war dieser Beweis verwickelter als jener. Doch schien mir gegenwärtige Uebersetzung desselben in Lokalformeln, zugleich als ein Beyspiel von dem sehr vortheilhaften Gebrauche zu dienen, den man öfters von solchen Formeln machen kann.

19. Substitution von Reihen in Reihen *).

*) Serierum in series substitutio (*Hindenburg Primae lineae* etc. p. XXVII.)

1. Auf ähnliche Art, wie in (18, 1) ergiebt sich, vermittelst des ersten Satzes (2) folgende allgemeine Gleichung:

$$\frac{1}{a} p \varkappa 1. \left(q \varkappa 1. x + \frac{1}{1+b}. q^{1+b} \varkappa 2. x^{1+b} + \frac{1}{1+2b}. q^{1+2b} \varkappa 3. x^{1+2b} \ldots\right)^{a}$$

$$+ \frac{1}{a+b}. p \varkappa 2. \left(q \varkappa 1. x + \frac{1}{1+b}. q^{1+b} \varkappa 2. x^{1+b} + \frac{1}{1+2b}. q^{1+2b} \varkappa 3. x^{1+2b} \ldots\right)^{a+b}$$

$$+ \frac{1}{a+2b}. p \varkappa. 3. \left(q \varkappa 1. x + \frac{1}{1+b}. q^{1+b} \varkappa 2. x^{1+b} + \frac{1}{1+2b}. {}^{1+2b} \varkappa 3. x^{1+2b} \ldots\right)^{a+2b}$$

$$+ \quad \&c \qquad \&c$$

$$= \frac{1}{a} (p q^{a}) \varkappa 1. x^{a} + \frac{1}{a+b} (p q^{a+b}) \varkappa 2. x^{a+b} + \frac{1}{a+2b} (p q^{a+2b}) \varkappa 3 \; x^{a+2b} + \&c$$

2. Man kann diesen Satz so ausdrücken:

Wenn $z = A y^{a} + B y^{a+b} + C y^{a+2b} + \ldots$

und $y = q \varkappa 1. x + \frac{1}{1+b}. q^{1+b} \varkappa 2. x^{2} + \frac{1}{1+2b}. q^{1+2b} \varkappa 3. x^{3} + \&c$

in die Reihe z substituirt werden soll, so kommt

$$z = \frac{1}{a}(pq^{a})\varkappa 1 . x^{a} + \frac{1}{a+b}(pq^{a+b})\varkappa 2 . x^{a+b}$$

$$+ \frac{1}{a+2b}(pq^{a+2b})\varkappa 3 . x^{a+2b} + \&c$$

wo $p\varkappa(n+1) = (a+nb)\, z\varkappa(n+1)$.

3. Da hier zweyerley Coefficienten von z in Betrachtung kommen, in so fern z nach y, und nach x ausgedrückt wird, so könnte man sie durch $\overset{y}{z}\varkappa(n+1)$, $\overset{x}{z}\varkappa(n+1)$ unterscheiden (wie $\overset{y}{d}z$, $\overset{x}{d}z$ Differentiale von z, nach y und nach x), und so sind die beiden Gleichungen in (2):

$$\overset{x}{z}\varkappa(n+1) = \frac{1}{a+nb}(pq^{a+nb})\varkappa(n+1) \text{ wenn}$$

$$\overset{y}{z}\varkappa(n+1) = \frac{1}{a+nb}\, p\varkappa(n+1)$$

Diese Bezeichnung scheint auch in andern Fällen, um Verwirrung zu vermeiden, dienlich zu seyn. Man vergleiche (12).

4. Wenn man in (1) differentiirt, so kommt:

$$p\varkappa 1 . \left(q\varkappa 1 . x + \frac{1}{1+b} q^{1+b}\varkappa 2 . x^{1+b}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{1+2b} q^{1+2b}\varkappa 3 . x^{1+2b} + \ldots\right)^{a-1}$$

$$+ p\varkappa 2 . \left(q\varkappa 1 . x + \frac{1}{1+b} q^{1+b}\varkappa 2 . x^{1+b} + \ldots\right)^{a-1+b}$$

$$+ p\varkappa 3 . \left(q\varkappa 1 . x + \frac{1}{1+b} q^{1+b}\varkappa 2 . x^{1+b} + \ldots\right)^{a-1+2b}$$

$$+ \qquad \&c \qquad \&c$$

$$= \frac{(pq^{a})\varkappa 1 . x^{a} + (pq^{a+b})\varkappa 2 . x^{a+b} + (pq^{a+2b})\varkappa 3 . x^{a+2b} + \text{etc}}{q\varkappa 1 . x + q^{1+b}\varkappa 2 . x^{1+b} + q^{1+2b}\varkappa 3 . x^{1+2b} + \text{etc}}$$

woraus sich noch eine andere Substitutionsformel als in (2) herleiten läßt.

20. Zusatz zu der Reversionsformel.

1. Aus (19,2) läßt sich folgendes herleiten:

Wenn $z = Ay^{a} + By^{a+b} + Cy^{a+2b} + \&c$

und $x = \mathfrak{A}y + \mathfrak{B}y^{1+b} + \mathfrak{C}y^{1+2b} + \&c$

$$\text{so wird } z = \frac{1}{a}(px^{-a}) \varkappa 1 . x^{a} + \frac{1}{a+b}(px^{-a-b}) \varkappa 2 . x^{a+b}$$

$$+ \frac{1}{a+2b}(px^{-a-2b}) \varkappa 3 . x^{a+2b} + \&c$$

$$\text{wo } p \varkappa (n+1) = (a+nb) \overset{y}{z} \varkappa (n+1).$$

Dieß enthält die Auflösung der Aufgabe: Wenn zwey Größen z und x durch Reihen nach einer dritten y ausgedrückt sind, eine von jenen beiden durch die andere (z durch x) auszudrücken. Man kann auch für p setzen $\frac{dz}{dy}$ (wenn nicht $a = 0$). Wenn $A = 1$, $B = C = \ldots = 0$, so wird daraus die bekannte Reversionsformel.

2. Allgemeiner ist:

Wenn $z = Ay^{a} + By^{a+b} + Cy^{a+2b} + \&c$

$x = \mathfrak{A}y^{\alpha} + \mathfrak{B}y^{\alpha+b} + \mathfrak{C}y^{\alpha+2b} + \&c,$

$$z^{m} = \frac{1}{am}(px^{\frac{-am}{\alpha}}) \varkappa 1 . x^{\frac{am}{\alpha}} + \frac{1}{am+b}(px^{\frac{-am-b}{\alpha}}) \varkappa 2 . x^{\frac{am+b}{\alpha}}$$

$$+ \frac{1}{am+2b}(px^{\frac{-am-2b}{\alpha}}) \varkappa 3 . x^{\frac{am+2b}{\alpha}} + \&c$$

$$\text{wo } p \varkappa (n+1) = (am+nb) z^{m} \varkappa (n+1)$$

$$\text{oder auch } p = \frac{mz^{m-1}dz}{dy}.$$

V.

Bemerkungen über eine besondere Art von Gleichungen, nebst Beyspielen von ihrer Auflösung; von Ebendemselben *).

---

1. Wenn man das durch die Gleichung: $p \varkappa (n+1) = \frac{f}{f+nd} q^{f+nd} \varkappa (n+1)$ angedeutete Verhalten zwischen den Coefficienten der Reihen p und q betrachtet, so erhellt zuerst von selbst, daß, die Coefficienten der Reihe q als gegeben angenommen, die Coefficienten der Reihe p dadurch bestimmt sind, und vermittelst des Potenzen-Theorems gefunden werden können.

2. Anders aber scheint es sich zu verhalten, wenn man die Coefficienten der Reihe p annimmt. Dann scheinen nur der erste Coefficient der $f$ten Potenz von q, der zweyte der $(f+d)$ten, der dritte der $(f+2d)$ten... der $(n+1)$te der $(f+nd)$ten Potenz, nemlich $q^f \varkappa 1$, $q^{f+d} \varkappa 2$, $q^{f+2d} \varkappa 3$, etc. bestimmt zu werden. Jedoch zeigt eine nähere Betrachtung, daß auch hier die Coefficienten der Reihe q alle nach der Ordnung (mittelbar) bestimmt sind.

3. Der Beweis beruhet auf einer einfachen Bemerkung, die bey diesen Untersuchungen sehr in Betrachtung kommt. Nemlich die n ersten Coefficienten der Potenz

*) Da diese sehr lehrreichen Bemerkungen über Coefficientengleichungen, auf die unbestimmten Coefficienten zweyer Reihen (p, q) auch deren Potenzen und Produkte sich beziehen; da selbige durch meine Lokalzeichen und Formeln veranlaßt und in ihnen vorgetragen, auch wegen deren Auflösung auf meine combinatorische Darstellung und Entwickelung ihrer Werthe (in 15) verwiesen worden ist: so ist die Stelle, welche ich diesem Aufsatze hier eingeräumt habe, hinlänglich dadurch gerechtfertiget.

Hindenburg.

einer Reihe (q^m) werden nur durch die n ersten Coefficienten der Reihe selbst (q) bestimmt, ohne daß die folgenden von diesen auf jene Einfluß haben. Oder $q^m \varkappa n, q^m \varkappa (n-1) \ldots q^m \varkappa 2, q^m \varkappa 1$, werden durch $q \varkappa n, q \varkappa (n-1) \ldots q \varkappa 2, q \varkappa 1$ bestimmt. Von dem ersten Coefficienten ist dieß offenbar, denn $q^m \varkappa 1$ ist $= (q \varkappa 1)^m$. Gilt nun die Behauptung bis $q^m \varkappa n$, so gilt sie auch für $q^m \varkappa (n+1)$. *) Es wird nemlich nach der Infinitinomialformel **) $q^m \varkappa (n+1)$ ausgedrückt durch $q^m \varkappa n$, $q^m \varkappa (n-1) \ldots q^m \varkappa 1$, und durch $q \varkappa 1, q \varkappa 2, \ldots q \varkappa (n+1)$. Nun werden angenommenermaßen $q^m \varkappa n$, $q^m \varkappa (n-1) \ldots q^m \varkappa 1$ bestimmt durch $q \varkappa n, q \varkappa (n-1), \ldots q \varkappa 1$; also auch $q^m \varkappa (n+1), q^m \varkappa n, \ldots q^m \varkappa 1$ durch $q \varkappa (n+1), q \varkappa n, \ldots q \varkappa 1$. ***)

4) Man kann diesen Satz allgemein so ausdrücken: durch $q^\mu \varkappa (n+1), q^\mu \varkappa n, \ldots q^\mu \varkappa 1$, werden für jeden andern Exponenten m, auch $q^m \varkappa (n+1), q^m \varkappa n, \ldots q^m \varkappa 1$ bestimmt. Man setze $q^\mu = p$, so wird $q^m = p^{\frac{m}{\mu}}$, und nun darf man in (3) p für q, und $\frac{m}{\mu}$ für m setzen.

5. Mit Zuziehung dieses Satzes läßt sich nun die Behauptung in (2) darthun, und zeigen, daß durch

*) Bekannt ist der Schluß: Wenn ein Satz für n gilt, so gilt er auch für n+1. Oefters muß man auch so schließen: Wenn ein Satz bis n gilt (d. i. für alle vorhergehende Werthe von n = 1, 2, 3, .. n), so gelte er auch für n+1 (den nächstfolgenden Werth). Zuweilen ist auch der Schluß dienlich: Wenn ein Satz für n−1 und n gelte, so werde er auch für n+1 gelten. H.

**) *Kaestner Analys. inf.* §. 54; Rothe l. c. pag. 4, wo die Formel in Localzeichen ausgedrückt ist. H.

***) Man kann sich davon leichter durch die unmittelbare Betrachtung der Entwickelung von $(\alpha + \beta z + \gamma z^2 ..)^m$ in $A + Bz + Cz^2 +$ etc überzeugen. Indessen schien mir die hier gewählte Erläuterung für gegenwärtige Absicht fruchtbarer.

$q^f \varkappa 1$, $q^{f+d} \varkappa 2$, $q^{f+2d} \varkappa 3$, ... $q^{f+nd} \varkappa (n+1)$, die Coefficienten von q und jeder Potenz von q, nach der Ordnung bis zum $(n+1)$ten bestimmt werden. Aus $q^f \varkappa 1$ folgt nemlich $q^m \varkappa 1$, also auch $q^{f+d} \varkappa 1$; daraus und aus dem gegebenen $q^{f+d} \varkappa 2$ folgt $q^m \varkappa 2$, folglich auch $q^{f+2d} \varkappa 2$; daraus, aus $q^{f+2d} \varkappa 1$, und aus dem gegebenen $q^{f+2d} \varkappa 3$ folgt $q^m \varkappa 3$. So läßt sich fortschließen.

6. Allgemeiner erhellet eben so, daß, wenn auch die Exponenten α, β, γ ... nicht in einer arithmetischen Reihe fortschreiten, doch durch $q^\alpha \varkappa 1$, $q^\beta \varkappa 2$, $q^\gamma \varkappa 3$, ... eben so viel Exponenten von q und jeder Potenz von q bestimmt werden.

7. Die Gleichung in (1):

$$p \varkappa (n+1) = \frac{f}{f+nd} q^{f+nd} \varkappa (n+1)$$

ist also in Rücksicht auf p und auf q eine bestimmte Gleichung. Es entsteht nun die Frage, wie sie in Rücksicht auf q (nach q) könne aufgelößt werden, da sie nach p keiner Auflösung bedarf.

Auflösung. Nach 1 (des vorhergehenden IVten Aufsatzes) folgt aus der angenommenen Gleichung diese:

$$p^m \varkappa (n+1) = \frac{mf}{mf+nd} \cdot q^{mf+nd} \varkappa (n+1).$$

Nun werde $mf+nd = 1$ gesetzt, so ist $m = \frac{1-nd}{f}$,

und $q \varkappa (n+1) = \frac{1}{1-nd} \cdot p^{\frac{1-nd}{f}} \varkappa (n+1)$. Dadurch ist die Aufgabe aufgelößt. Zugleich erhellet, daß für jede Potenz von q, $q^\lambda \varkappa (n+1) = \frac{\lambda}{\lambda-nd} p^{\frac{\lambda-nd}{f}} \varkappa (n+1)$.

8. Die allgemeine Gleichung:

$$p^{\mu} \varkappa(n+1) = \frac{h}{f+nd} q^{\frac{f+nd}{e}} \varkappa(n+1)$$

läßt sich auf ähnliche Art auflösen. Nach (3 l. c.) ist $p^{m} \varkappa(n+1) = \left(\frac{h}{f}\right)^{\frac{m}{\mu}} \cdot \frac{mf}{mf+nd\mu} q^{\frac{mf+nd\mu}{e\mu}} \varkappa(n+1)$.

Es sey nun $\frac{mf+nd\mu}{e\mu} = 1$, so wird $m = \frac{e\mu - nd\mu}{f}$,

folglich $q \varkappa(n+1) = \frac{e}{e-nd} \left(\frac{f}{h}\right)^{\frac{e-nd}{f}} p^{\frac{(e-nd)\mu}{f}} \varkappa(n+1)$.

Für jede Potenz von q ergiebt sich, $\frac{mf+nd\mu}{e\mu} = \lambda$ gesetzt,

$$q^{\lambda} \varkappa(n+1) = \frac{\lambda e}{\lambda e - nd} \cdot \left(\frac{f}{g}\right)^{\frac{\lambda e - nd}{f}} \cdot p^{\frac{(\lambda e - nd)\mu}{f}} \varkappa(n+1)$$

9. Es soll die Gleichung

$$p \varkappa(n+1) = (\alpha + \beta n). q^{f+nd} \varkappa(n+1)$$

nach q aufgelöset, d. i. die Coefficienten-Reihe von q durch die von p bestimmt werden.

Auflösung. Man nehme eine dritte Reihe w an, daß $w \varkappa(n+1) = (\alpha+\beta n)(f+nd) f. p \varkappa(n+1)$, so ergeben sich die Coefficienten von w, aus den angenommenen von p. Zugleich aber ist $w \varkappa(n+1) = \frac{f}{f+nd} . q^{f+nd} \varkappa(n+1)$, also (nach 7) $q \varkappa(n+1) = \frac{1}{1-nd} w^{\frac{1-nd}{f}} \varkappa(n+1)$. So ist demnach q durch w, folglich durch p bestimmt.

10. Aufgabe. Die Gleichung: $\mathfrak{N} p \varkappa (n+1) = N . q^{f+nd} \varkappa (n+1)$ nach q aufzulösen. $\mathfrak{N}$ und N sind hier Funktionen von n.

Auflösung. Es sey $\frac{f\mathfrak{N}}{(f+nd)N} . p \varkappa (n+1) = w \varkappa (n+1)$, so ist w durch p bestimmt.

Nun ist $\frac{f}{f+nd} . q^{f+nd} \varkappa (n+1) = w \varkappa (n+1)$, also $q \varkappa (n+1) = \frac{1}{1-nd} w^{\frac{1-nd}{f}} \varkappa (n+1)$, folglich auch q bestimmt.

11. Aufgabe. Es sey $\mathfrak{N} p^{f+nd'} \varkappa (n+1) = N q^{f+nd} \varkappa (n+1)$, die Coefficienten von q aus denen von p zu finden.

Auflösung. Man nehme eine dritte Reihe w an, daß $\frac{f\mathfrak{N}}{(f+nd)N} . q^{f+nd'} \varkappa (n+1) = w \varkappa (n+1)$, so ist w durch p bestimmt, und, weil $q \varkappa (n+1) = \frac{1}{1-nd} . w^{\frac{1-nd}{f}} \varkappa (n+1)$, auch q.

12. Die bisher (7—11) betrachteten Gleichungen gehören zu den einfachsten ihrer Art. Eine nähere Betrachtung zeigt, daß es viel verwickeltere geben könne. Sie können mehr als zwey Glieder enthalten, Produkte von p und q und ihrer Potenzen, auch höhere Potenzen von n (z. B. n^2) in den Exponenten von p und q.

13. Daß, und wie solche Gleichungen bestimmt sind, läßt sich durch eben solche Schlüsse, wie in (5), darthun. Es sey z. B. $\mathfrak{N} p^{g+ne} \varkappa (n+1) + \mathfrak{N}' p^{g'+ne'} \varkappa (n+1)$

$+ \mathfrak{N}'' p^{g''+nc''} \varkappa (n+1) +$ etc $= N q^{f+nd} \varkappa (n+1)$
$+ N' q^{f'+nd'} \varkappa (n+1) +$ etc, wo $\mathfrak{N}, \mathfrak{N}', \mathfrak{N}'' \ldots$;
und N, N', N'' etc Funktionen von n sind.

Man nehme die Coefficienten von p an, so werden die von q dadurch bestimmt. Was linker Hand des Gleichheitszeichens steht, werde für n = 0; 1; 2; 3; ... gleich $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$; ferner werden unter eben diesen Voraussetzungen für n; $N, N', N'', \ldots$ gleich $A, A', A'' \ldots$; $B, B', B'', \ldots$; $C, C', C'', \ldots$; u. s. w. so verwandelt sich die angenommene Gleichung, für n = 0, in folgende:

$$\mathfrak{A} = A q^f \varkappa 1 + A' q^{f'} \varkappa 1 + A'' q^{f''} \varkappa 1 \text{ etc}$$
$$= A. (q \varkappa 1)^f + A' (q \varkappa 1)^{f'} + A'' (q \varkappa 1)^{f''} \ldots;$$

durch welche Gleichung $q \varkappa 1$, also auch $q^m \varkappa 1$ bestimmt ist. Nun ist für n = 2, $\mathfrak{B} = B q^{f+d} \varkappa 2 + B' q^{f'+d'} \varkappa 2 + B'' q^{f''+d''} \varkappa 2 + \ldots$ Aber für jedes m ist $q^m \varkappa 2 = q \varkappa 2. (q \varkappa 1)^{m-1}$. Also wird $q \varkappa 2 =$

$$\frac{\mathfrak{B}}{B(f+d)(q \varkappa 1)^{f+d-1} + B'(f'+d')(q \varkappa 1)^{f'+d'-1} + \ldots}$$

Eben so ergeben sich alle folgende Coefficienten von q und von Potenzen von q, durch einfache Gleichungen. Aehnliche Schlüsse lassen sich in andern Fällen anbringen.

14. **Das allgemeine bey diesen Gleichungen kommt darauf an:** Sie finden statt zwischen den unbestimmten Coefficienten zweyer Reihen (p, q) und deren Potenzen, auch Produkten derselben. In den Faktoren der Glieder solcher Gleichungen, so wie in den Potenzen von p und von q kommt, außer beständigen bekannten Größen, eine veränderliche (n oder n+1) vor, welche der Index der unbestimmten Coefficienten ist, oder ihre Stelle in den zugehörigen Reihen anzeigt. Die Auflösung einer solchen Gleichung (nach p) beruht darauf,

daß man die Coefficienten der einen Reihe aus denen der andern findet, oder $p \varkappa (n+1)$ abgesondert darstellt, also die veränderliche Größe aus dem Exponenten von p. wegbringt, davon absondert. Es lassen sich auch solche Gleichungen für mehrere Reihen, und sonst noch andere Verwickelungen denken. Gleichungen dieser Art scheinen mir am schicklichsten durch den Ausdruck: Coefficienten-Gleichungen, bezeichnet zu werden.

15. Als Postulate, oder vielmehr als bereits aufgelöste Probleme, müssen bey dieser Untersuchung folgende Sätze betrachtet werden: Wenn die Coefficienten von p und q gegeben sind, so sind auch die Coefficienten von p^m, q^μ; $p^m q^\mu$; $\frac{p^m}{q^\mu}$ gegeben; oder $p^m \varkappa (n+1)$, $q^\mu \varkappa (n+1)$; $(p^m q^\mu) \varkappa (n+1)$, $\left(\frac{p^m}{q^\mu}\right) \varkappa (n+1)$, sind durch $p \varkappa (n+1)$ und $q \varkappa (n+1)$ bestimmt. Es ist kaum nöthig zu erinnern, daß hiebey die Hindenburgische combinatorische Darstellung *) der Reihenglieder außer der Ordnung, unabhängig von den vorhergehenden, bey Potenziirungen **),

*) Zur Uebersicht und bey der Anwendung derselben dienen sehr gut Hrn. M. Töpfers VI. und VII. Tafel (Combin. Analytik rc.) P. Man vergleiche auch meine Lokalformeln für das allgemeine Produktenproblem (Arch. der Math. H. II. S. 224—228.) H.

**) Dieses, so viel ich mich erinnere, bisher nicht gebräuchliche Wort, dessen sich Hr. Prof. Fischer bedient, scheint ganz passend zu seyn. Möchten wenigstens alle Neuerungen in der mathematischen Sprache immer so unschuldig bleiben, und ihrer Bestimmtheit und Einfachheit nie Abbruch thun! ein Wunsch, den manche Phänomene in den unruhigern Gegenden der literarischen Welt erregen können. (*Kaestner de polyedris* Comment. Soc. Goett. V. IX. Class. Math. p. 5. *Sunt quidem Mathematici de aptis nominibus solliciti, sed, quae semel in usum receperunt, difficulter mutant. Qua sermonis constantia id adsequuntur, ut veris inveniendis id operae et temporis tribuere possint, quod eiusdem rei plures appellationes sibi postulant in aliis eruditionis partibus, quas nominum copia per-*

Multiplikationen und Divisionen von Reihen zum Grunde zu legen sey.

16. Es sey z. B. die Coefficienten-Gleichung: $\mathfrak{N}(p^m q^\mu)\varkappa(n+1) = N q^{f+nd}\varkappa(n+1)$ aufzulösen, wo N und $\mathfrak{N}$ Funktionen von n sind.

Es sey

$$\frac{f\mathfrak{N}}{N(f+nd)}(p^m q^\mu)\varkappa(n+1) = \frac{f}{f+nd}\, q^{f+nd}\,\varkappa(n+1)$$

$= w\varkappa(n+1$, so ist $q\varkappa(n+1) = \frac{1}{1 \cdot nd} \cdot w^{\frac{1 \cdot nd}{f}}\,\varkappa(n+1)$,

und $q^\mu \varkappa(n+1) = \frac{\mu}{\mu \cdot nd} \cdot w^{\frac{\mu \cdot nd}{f}}\,\varkappa(n+1)$, also q durch w ausgedrückt *). Man hat aber auch $(p^m q^\mu)\varkappa(n+1)$ $= \frac{N(f+nd)}{\mathfrak{N}f}\, w\,\varkappa(n+1)$, und wegen q^μ, nach (15) auch $\left(\frac{p^m q^\mu}{q^\mu}\right)\varkappa(n+1) = p^m \varkappa(n+1)$, folglich auch $p\varkappa(n+1)$. So können wenigstens die Coefficienten von p und von q durch die angenommenen Coefficienten einer

dic.) Wie lehrreich ist darin für den Mathematiker Leibnitzens Beispiel, der zur Benennung einer neuen Wissenschaft einem, dem Schüler der Rechenkunst bekannten, Worte eine andere Endung gab, und die Operationen der neuen Rechnungsart durch zwey eben so einfach gewählte Zeichen ausdrückte. (Vergl. Erxlebens Physik mit Zus. von Lichtenberg. Vorrede zur 6ten Auflage XXXVII, XXXVIII.). P.

Was Herr Prof. Pfaff in dieser Anmerkung gegen Sprachneuerungen, Zeichenverstümmelung und Einführung überflüssiger und unschicklicher Zeichen sagt, hat meinen ganzen Beifall. Doch soll, hoffentlich, für die Mathematik hier nichts zu fürchten seyn, obschon das servum imitatorum pecus überall Unfug stiftet. H.

*) Diese Redensart ist durch das Bisherige deutlich.

dritten Reihe w ausgedrückt werden. Bekanntlich löst man auch gewöhnliche Gleichungen zwischen y und x zuweilen so auf, daß man beyde durch eine dritte z ausdrückt.

Es eröfnet sich hier, wie es mir vorkommt, ein weites Feld für analytische Speculationen, die wenigstens durch ihre Schwierigkeit und Neuheit Interesse zu haben scheinen. Vielleicht möchten sie auch sonst nicht ganz ohne Nutzen bleiben.

VI.

Die Combinationslehre ist eine selbstständige Grundwissenschaft; ihre Verbindung mit der Analysis ist die engste und natürlichste; die unmittelbarste Anwendung derselben zeigt sich bey dem allgemeinen Produkten- und Potenzenprobleme der Reihen; Vergleichung des von Hrn. Tetens bey diesen Problemen angebrachten Substitutionsverfahren mit der Hindenburgischen Combinationsmethode; Nothwendigkeit einer in die Analysis einzuführenden allgemeinen, größtentheils combinatorischen, Charakteristik;

von

C. F. Hindenburg.

I. Die Combinationslehre ist eine selbstständige Grundwissenschaft; ihre Verbindung mit der Analysis ist die engste und natürlichste.

1. Was den wichtigen Einfluß der Combinationslehre auf die Analysis, die nothwendige Verbindung jener mit dieser, anbetrifft, so weiß ich darüber nichts besseres zu sagen, als was Hr. Prof. Klügel in seiner Abhandlung, welcher ich einige erläuternde Anmerkungen beygefügt habe, bereits gesagt hat. Die, überhaupt

oder nach bestimmten Rücksichten und Bedingungen, zu treffende Anordnung gegebener Elemente zu einem für sich bestehenden Ganzen, die Veränderung und Umstaltung einer gegebenen oder bereits geschaffenen Form in eine andere Gestalt, durch anderweitige Zusammensetzung, Trennung, Versetzung, Umtauschung der einzelnen oder verbundenen Elemente — dies ist das eigenthümliche Geschäft der Combinationslehre. Hierbey betrachtet sie die in bestimmter Folge auf einander gegebenen Elemente, blos als zusammengehörige verschiedentlich neben und unter einander zu stellende, in verschiedener Ordnung und Lage mit einander zu verbindende Dinge überhaupt, ohne alle Rücksicht auf Bedeutung oder gegenseitige Einwirkung derselben auf und in einander. Erläuternde Beyspiele dieser Art findet man unter andern im Archiv der Mathematik in Menge, besonders in meinen Aufsätzen über combinatorische Involutionen, Evolutionen und deren Anwendung, die in den vier ersten Heften zerstreut vorkommen. Betrachtet man, was man nur dort findet, mit einiger Aufmerksamkeit, so wird es schwer werden zu entscheiden, ob man die Mannichfaltigkeit oder die Leichtigkeit der Darstellung und Umwandlung combinatorischer Formen mehr bewundern soll.

2. Die große Allgemeinheit, in welcher die Combinationslehre ihre Elemente nimmt, indem sie bey ihren Operationen von aller Bedeutung und Einwirkung derselben auf einander abstrahirt, könnte (wenn man nicht sonst schon vom Gegentheil überzeugt wäre) leicht auf die Vermuthung führen, eine solche Wissenschaft werde aller Anwendung sich widersetzen, und so auf immer bloße Speculation bleiben. Aber nein; die wirklichen Dinge, auf die man sie anwendet, bringen sogleich Leben und Bedeutung in die Sache. Man muß die Beschaffenheiten dieser Dinge, ihr Verhalten gegen und ihre Wirkung

auf einander, aus der Wissenschaft, aus der Kunst, aus dem Fache, wohin sie gehören, erst genauer kennen; man muß wissen, was man durch Beyhülfe der Combinationslehre zu suchen hat, und so wird diese immer nachweisen, wie man es auf dem leichtesten Wege finden kann [a]).

3. Unter allen Anwendungen, die man von der Combinationslehre auf so verschiedene Gegenstände machen kann und bereits gemacht hat, ist keine inniger und natürlicher, als die auf die Analysis, in der weitläuftigsten Bedeutung des Worts, die Herr Prof. Klügel (in seiner obigen Abhandlung §. 3.) so gut aus einander gesetzt hat. Eine Aufgabe enthält gegebene und zu suchende (bekannte und unbekannte) Größen, nebst verschiedenen Bedingungen, die das Verhalten derselben gegen, und ihre Beziehung auf einander, ausdrücken. Die Formeln welche die unbekannten Größen durch die bekannten darstellen, was sind sie anders, als eine Verbindung der letztern, nach einem gewissen combinatorischen Gesetze? — Eine Funktion soll von der Gestalt, die sie hat, in eine andere Form von gegebener Art, umgewandelt werden? werden da nicht die Größen, auf die es bey der Umände-

a) So hat, um ein Beyspiel anzuführen, Bergmann die Zahl und Zusammensetzung der sogenannten zwey- drey- vier- fünf- fachen (aus den zu seiner Zeit allgemein angenommenen fünf einfachen) Erden combinatorisch dargestellt, und dabey, zu genauerer Bestimmung der specifischen Verschiedenheit, nicht blos auf *indolem* und *numerum*, sondern auch, worauf bekanntermaßen so viel ankommt, auf das *pondus* der einzelnen Bestandtheile Rücksicht genommen, hat auch zu bequemerer Uebersicht, die aufgestellten Combinations- und Variationscomplexionen nach den *generibus* geordnet. Opusc. phys. chem. Tom. IV. p. 230 — 237. Ein anderes Beyspiel; Ebend. p. 244, 245. Da in der Chemie alles *Pondere, Mensura, Numero* zu beachten, so eröfnet sich hier ein weites Feld für solche und ähnliche Untersuchungen. Einen Versuch, die chemische Analysis mit der mathematischen zu verbinden, enthalten die neuerlich erschienenen Anfangsgründe der (chemischen) Stöchyometrie (1792—1794).

rung eigentlich ankommt, nach gewissen, von jener Funktion und dieser Gestalt abhangenden, Gesetzen bestimmt? und wenn man sich einige Zeit mit den combinatorischen Operationen beschäftiget (welches man freylich bisher wenig oder gar nicht gethan hat) und nun ihre Uebereinstimmung mit gewissen analytischen, auf andern Wegen gefundenen, Formen bemerkt hat, kann man da an dem sehr nützlichen und erheblichen Einfluß der Combinationslehre auf die Analysis nur einen Augenblick zweifeln?

4. Daß diese Gesetze, in den Formeln, welche die Resultate der Aufgaben enthalten, daß sie in den umgestalteten Funktionen, nicht immer klar und deutlich vor Augen liegen; daß sie oft sehr tief versteckt, und, selbst für den scharfsichtigen Forscher, so gut als nicht vorhanden sind; daß endlich, wenn auch Gesetze, selbst dem äußern Ansehen nach ganz einfache und simple, sich zeigen, diese gleichwohl bey der Anwendung nicht selten in große Schwierigkeit und Verwickelung führen, indem sich hier ein ganzes Heer von beschwerlichen Substitutionen und Reduktionen entgegenstellt, welchem sehr oft der Muth und die Geduld auch des unerschrockendsten Rechners erliegen muß — davon habe ich die beyden Hauptursachen (*Nov. Syst. Perm. p.* I, II. *not.* a) bereits angegeben. Denn, einmal hat man zeither bey Auflösung der Aufgaben, bey Anordnung ihrer Formeln, bey Aufstellung und Umwandlung der analytischen Formen, auf Permutationen, Combinationen und Variationen gar keine Rücksicht genommen; man hat auf die so nothwendige Scheidung der heterogenen und Sammlung der homogenen Elemente nicht gehörig geachtet, und so ungleichartige Dinge, Coefficienten und Exponenten, bestimmte und unbestimmte, beständige und veränderliche Größen, und das nicht selten aus mehrern Reihen zusammen, durch ein und dasselbe

Gesetz darzustellen, in einen Ausdruck zusammen zu fassen gesucht; welches, zumal bey verwickelten Sätzen, nothwendig Schwierigkeiten herbeyführen, und daher nie geschehen muß. Man muß vielmehr (wie ich an sehr vielen Beyspielen bereits gezeigt habe) die heterogenen oder sonst nicht zusammengehörigen, obschon gleichartigen, Größen sorgfältig von einander sondern, die combinatorischen Gesetze derselben einzeln aufsuchen, wie sie in ihren Gliedern zusammen gehören nachweisen, und in Formeln (wozu die combinatorisch-analytischen vorzüglich geschickt sind) darstellen (Arch. der Math. H. I. S. 16, 5; S. 17, Anmerk.). Dasselbe Verfahren muß man auch bey Umwandlung der Functionen beobachten. Solche Formeln nun weisen immer unmittelbar auf combinatorische, wie die gewöhnlichen auf arithmetische oder analytische Operationen, hin. Ein sehr bedeutender Vorzug meiner Zeichen, daß sie das thun, und doch zugleich alle übrige nicht-combinatorische Veränderungen sich bey ihnen nachweisen und anbringen lassen! Bey weitläuftigen analytischen Untersuchungen und Rechnungen, so lange man nur mit Verhältnissen, Relationen, Gleichungen, Anordnung allgemeiner Formeln für die Endresultate, zu thun hat, kann man, statt der combinatorischen Zeichen und Formeln, ihrer Stellvertreter, der so kurzen, und (es wird mir erlaubt seyn hinzuzusetzen) ausdrucksvollen und faßlichen Lokalzeichen und Formeln sich bedienen, die man, sobald man will, in combinatorische umsetzen, und daraus ihre Werthe in den gegebenen einfachen Größen ausdrücken kann. Häufige Beyspiele des nützlichen sehr weit ausgedehnten Gebrauchs solcher Lokalformeln findet man in Herrn Professor Rothens Dissertation: Formulae analytico-combinatoriae de Serierum Reuersione demonstratio; in meinem Programm: Paralipomena ad Serierum Reuersionem; und in Herrn Prof. Pfaff's nächstvorher-

gehenden beiden Abhandlungen. Den Gang, den man hierbey zu nehmen hat, habe ich in jenem Programm deutlich vorgezeichnet (Arch. der Math. I. H. S. 17 in der Note). Vom Nutzen der Lokalausdrücke oder Formeln in der Kürze, Toepf. comb. Anal. S. 159 — 164.

5. Es ist in der That zu verwundern, daß bey so nachdrücklichen Anpreißungen der Sache überhaupt, von Leibnitzen und de Moivre, nach so vortreflichen, und von ihren Urhebern so sehr empfohlenen, Beyspielen, als de Moivre, Boscovich, Cramer und Bezout aufgestellt haben, doch Alles so lange Zeit innerhalb der sehr engen Gränzen jener speciellen Anwendungen geblieben ist. Man erkannte und bewunderte die Vortheile solcher so ganz isolirt hingestellter Darstellungen b), und übersah dabey das Allgemeine c), das ihnen zum Grunde liegt (hier S. 97. Note f). Mir ist es gerade eben so gegangen. Ohne eine ganz besondere Beharrlichkeit, jenes so schwierige Gesetz der Formation der Coefficienten von Potenzgliedern eines Polynomiums (hier S. 83 Note l) zu entdecken und allgemein zu beweisen, würde ich nicht auf jene Lokalformel gekommen seyn, deren Auflösung mich auf Combinationsverfahren leitete. Hierbey war mir ganz unbekannt, was de Moivre und Boscovich bey eben dem Problem schon geleistet hatten; und das war sehr vortheilhaft für die Sache, denn sonst würde ich mich, mit

b) Mehrere solcher emphatischen Empfehlungen und bewundernden Aeußerungen, habe ich hier und da in meinen Schriften angeführt. Die Sache liegt, sowohl durch die aufgestellten Beyspiele selbst, als durch die dabey gegebene Nachweisung, so offenbar vor Augen, daß es scheint, man hätte sie schon seit langer Zeit nicht weiter übersehen, sondern vorlängst generalisiren, und in Richtigkeit bringen sollen. Aber — *ita fit plerumque: quae sunt ante oculos non videmus, facilia negligimus, venamur difficilia.*

c) Selbst Bezout, der zwar viel allgemeine Sätze aufgestellt hat, die aber nicht selten auf verwickelte Operationen führen, an deren Stelle leichtere combinatorische stehen sollten.

ihren so kurzen und äusserst leichten Verfahren befriediget, und so mein allgemeines Discerptionsproblem für Combinationen so wie das für Variationen nicht gefunden, auf Einführung von so ausgedrückten Lokalformeln, mit ihren Relationen gegen einander, nicht verfallen, und ihren Zusammenhang mit Combinationen vielleicht auf immer verfehlt haben. Aber dabey blieb es nun auch lange Zeit. Immer glaubte ich, der gefundene Vortheil durch Anwendung der Combinationslehre erstrecke sich nur auf das Polynomialpotenzproblem (*Infin. Dign. Praef. p.* XII. und *Nov. Syst. Perm.* p. III) er gehöre diesem Probleme eigenthümlich zu, bis ich, während daß bereits an den *Infin. Dignit.* gedruckt wurde, auf den merkwürdigen Satz (Ebend. p. 101) verfiel, dem ich den Namen Methodus potentiarum gegeben habe, durch dessen Beyhülfe ich aus dem Polynomialsatze, in andere verwandte und von ihm abhangende, wie auf einer Brücke übergehen konnte. Dieser Satz, so wie andere, in der Folge gefundene, Sätze zeigten klar und deutlich, die Combinationsmethode erstrecke sich noch viel weiter, und es lasse sich von derselben eine ganz allgemeine Anwendung auf die Analysis machen, wenn man die Combinationslehre zuvor umstaltete, und sie, vornehmlich durch Einführung von combinatorischen Operationen nach festbestimmten Regeln, durch den Gebrauch schicklicher und ausdruckvoller Zeichen u. s. w. zu dieser Anwendung bequem einrichtete. Was nun insbesondere die neueinzuführenden Operationen anbetrifft, so hatten die beiden von mir bereits aufgefundenen Discerptionsprobleme, bey der Allgemeinheit und Bequemlichkeit, die sie bey der Anwendung bewiesen, deutlich gezeigt, wie ich mich wegen der übrigen Operationen und Involutionen zu verhalten habe; so wie sie auch überhaupt die Möglichkeit einer combinatorischen Analysis, und was dazu erfordert werde, deutlich durchsehen liessen. Diese Betrach-

tungen veranlaßten die Ausfertigung meines *Nov. Syst. Perm.* worinn ich die Gründe, Hauptsätze und Zeichnung, ihre nächste Anwendung und weitere Aussichten gegeben habe. Nützliche Belehrungen über combinatorische Involutionen und Evolutionen, auf die hier so viel ankommt, findet man im ersten Bande des mathematischen Archivs.

6. Ich glaube, nach der itzigen Lage der Sache, und nach dem, was ich hier gesagt und angeführt habe, kann man den wichtigen Einfluß der Combinationslehre auf die Analysis, die so enge und natürliche Verbindung jener mit dieser, als entschieden ansehen; um so mehr, da, wenn ich hierbey auch gar nicht auf meine und die Schriften Anderer, die das combinatorische Verfahren mit seiner Anwendung durch mündliche Vorträge von mir haben kennen lernen, Rücksicht nehmen will, ich mich nun auf auswärtige Zeugnisse berufen kann — auf die Erfahrungen der Herren Klügel, Kramp und Pfaff, dieser vortreflichen Analysten, die, nach genauer Prüfung der Sache, sehr vortheilhaft und öffentlich dafür gestimmt haben.

7. Die Gründe, auf welchen die Sache beruht, verstatten nicht nur die ausgedehnteste Anwendung, sondern sie sind auch über alles leicht; und die combinatorische Form kann, mit ihrer simpeln Bezeichnung, ohne weitere Vorbereitung, sogleich gefaßt werden. Die Combinationslehre tritt hierbey, besonders was die Darstellung und Entwickelung ihrer Formen, worauf in der Analysis doch so viel ankommt, anbetrifft, als selbstständige Grundwissenschaft auf, die, sich allein genügend, fremder Hülfe nicht bedarf. Man kann zwar arithmetische Begriffe und Sätze auf combinatorische anwenden, und hat solches bereits häufig und mit großem Vortheile gethan; so daß man auch hier sagen kann

alterius sic
Altera poscit opem res et coniurat amice

aber es ist wichtig, die rein-combinatorischen Verfahren, wie ich sie zu nennen pflege, von den gemischten zu unterscheiden. Jene sind, wenn es möglich ist, noch einfacher als diese, und die dabey vorkommenden Veränderungen, die gewöhnlich geradezu auf Involutionen führen, beruhen 1) auf Ansetzen oder Beyfügen 2) auf Wegnehmen oder Absondern 3) auf Aus- oder Umtauschung gewisser, so wie auf bestimmter Anordnung der übrigen Elemente.

8. Da ich von rein combinatorischen Verfahren nur hier und da gelegentlich gesprochen habe, so, hoffe ich, soll es den Lesern nicht unangenehm seyn, mehrere Beyspiele davon, und zwar bey Operationen aller Art, hier beysammen zu treffen. Es kann nicht schaden, ja es ist vielmehr Jedem, der sich mit der combinatorischen Analysis bekannt machen, und von ihrem Werthe selbst urtheilen will, zu rathen, sich von solchen Operationen zuerst die nöthigen Kenntnisse zu erwerben. Häufige Erfahrungen haben mich gelehrt, daß ungünstige Urtheile über die Sache, größtentheils durch Mangel hinreichend genauer Kenntnisse der combinatorischen Arbeiten und Zeichen, veranlaßt worden sind.

Rein-combinatorische Darstellungen von Permutationen, Combinationen und Variationen gegebener Dinge.

9. Davon wird hier nur so viel beygebracht werden, als wegen des Gebrauchs in Folgendem nöthig ist. Man wird nicht erwarten, das bereits Gesagte und anderwärts Bekanntgemachte hier blos wiederholt zu finden.

Nur bey einigen Auflösungen wird das, des Zusammenhangs wegen, der Fall, alles Uebrige aber neu seyn.

Ich kann voraussetzen, daß die Bedeutung der Wörter: Complexionen, Ordnungen, Classen, gutgeordnete Complexionen, gutgeordnete Classen oder Folgen von Complexionen, Combinationen und Variationen an sich (simpliciter) und zu bestimmten Summen, mit und ohne Wiederholungen, welche hier zunächst vorkommen werden, schon bekannt seyen. Man findet sie auch, zum Theil in den vorhergehenden Abhandlungen (z. B. in der von Herrn Prof. Klügel) bereits hier und da gebraucht. Ihre Erklärungen habe ich im *Nov. Syst. Perm.* gegeben; man vergleiche Toepf. comb. Anal. S. 47, 48, wo auch zugleich S. 49, 50 die vorzüglichsten und am häufigsten vorkommenden combinatorischen Zeichen erklärt werden. Nur wegen des bisher seltener, in dieser Schrift noch gar nicht, vorgekommenen Worts Ordnung muß ich erinnern, daß es sich auf die Anfangselemente der Complexionen bezieht, und daß alle Complexionen einer Classe zu einer Ordnung gerechnet werden, die mit einem und demselben Elemente anfangen. So gehören aaa, aab, aac, abb, abc, acc zu einer Ordnung, und eben so bbbb, bbbc, bbcd, bcde; jene zur Ordnung a der dritten, diese zur Ordnung b der vierten Combinationsclasse (*Nov. Syst. Perm. p.* VIII, 20).

10. Noch ist hier zu erinnern, daß ich die Gesetze der Fortschreitung der Zahlen, nach jedem System (und in der Folge auch die der lexikographischen oder alphabetischen Fortschreitung bey Wörtern) nach der Reihe und sprungweise, zum Grunde meiner Combinationslehre gelegt habe, bey welcher gutgeordnete Complexionen oder Folgen derselben, wie Zahlen

wachsen oder abnehmen (wie Wörter in alphabetischer Ordnung, vor oder rückwärts gelesen, auf einander folgen). Von den Vortheilen einer solchen Einrichtung (Arch. der Math. Heft I. S. 22 u. f.). Vom Gebrauche lexikographischer Anordnungen in der Analysis, mein Programm: Terminorum ab infinitinomii dignitatibus Coefficientes Moivraeanos sequi ordinem lexicographicum, ostenditur. Das Verfahren, nach welchem hierbey die gesuchten Complexionen, durch Zusammensetzung oder Absonderung ihrer Elemente, in horizontaler, verticaler oder aus beiden gemischter Richtung, sich ergeben verstattet immer, ein solches Verbindungsgesetz auszuwählen, welches das gesuchte Resultat leichter und geschwinder herbeyführt, als auf keinem andern Wege, durch kein anderes Verfahren, möglich ist.

(A) Versetzungen (*Permutationes*).

11. Aufgabe. Gegebene Dinge oder Elemente

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \ldots \\ a & b & c & d & e & f \ldots \end{pmatrix}$$

auf alle nur mögliche Arten zu versetzen.

12. Erste Auflösung. Aus der Anfangscomplexion abcd... oder 1234... für n Dinge, suche man die nächstfolgende höhere (höhere oder niedrigere Complexionen sind hier mit größern oder kleinern Zahlen gleichgültig) und aus dieser wieder die nächsthöhere (immer aus denselben und gleichvielen Elementen bestehende) Complexion, und so fort, nach folgender Regel:

I. Man suche von der Rechten nach der Linken zu, das erste Element, das als ein niedrigeres oder kleineres, auf ein höheres oder größeres folgt;

II. Zu diesem niedrigern suche man, aus denen die ihm zur Rechten stehen, das nächsthöhere;

III. Man setze dieses höhere Element (II) in die Stelle des niedrigern (I) behalte die Elemente zur Linken (wenn dergleichen vorhanden sind) unverändert bey, und schreibe das niedrigere mit den übrigen, gutgeordnet, von der Linken nach der Rechten zu;

IV. Die Complexion, auf welche man die Vorschriften (I, II, III) nicht weiter anwenden kann, ist alsdann die letzte.

13. Exempel. Auf abcdef folgt abcdfe, und darauf abcedf, und dann abcefd, u. s. w. bis man auf die letzte Complexion fedcba verfällt, wo kein niedrigeres Element auf ein höheres folgt. Die punctirten Buchstaben sind hier die beiden Elemente der Auflösung I, II.

Eben so findet man die Versetzungen von 11222 nach der Ordnung:

11222	12212	21122	21221	22121
12122	12221	21212	22112	22211

die Regel erstreckt sich auf Zahlen- und Buchstaben-Complexionen mit gleicher Leichtigkeit, und schafft die gesuchten Complexionen, die gegebenen Elemente mögen nun alle verschieden, wie im ersten, oder einige davon einerley seyn, wie im letzten Falle.

Das zunächst folgende Verfahren will ich gleich auf einen bestimmten Fall anwenden; die Auflösung wird dennoch allgemein seyn (*Infin. Dignit. p.* 78, *not.*)

14. Zweyte Auflösung. Für gegebene Elemente

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

1234	abcd	2134	bacd	3124	cabd	4123	dabc
1243	abdc	2143	badc	3142	cadb	4132	dacb
1324	acbd	2314	bcad	3214	cbad	4213	dbac
1342	acdb	2341	bcda	3241	cbda	4231	dbca
1423	adbc	2413	bdac	3412	cdab	4312	dcab
1432	adcb	2431	bdca	3421	cdba	4321	dcba

I. Man setze, wie hier zur Seite, das Element d als einzelnes Ding. d)

1	2	3	4	a	b	c	d
1	2	4	3	a	b	d	c
1	3	2	4	a	c	b	d
1	3	4	2	a	c	d	b
1	4	2	3	a	d	b	c
1	4	3	2	a	d	c	b

II. Dem d setze man das nächstvorhergehende Element c vor; das giebt c d, die Ordnung c aus zwey Dingen c, d. Aus der Ordnung c findet man man die folgende Ordnung d, wenn man c und d gegen einander umtauscht. Das giebt zusammen cd und dc, die beiden Versetzungen zweyer Dinge, c, d.

III. Den einzelnen Complexionen cd und de in II setze man b vor. Das giebt die Ordnung b, aus welcher man die Ordnung c, und aus dieser wieder die Ordnung d findet, wenn man, im ersten Fall b, c mit c, b, im zweyten c, d mit d, c verwechselt, und die so abgeleiteten Complexionen unter einander schreibt. Das giebt zusammen

d) Ich werde hier in der Auflösung immer nur die Buchstaben nennen, weil man sich die correspondirenden Zahlen leicht denken kann.

bcd, bdc, cbd, cdb, dbc, dcb, die sechs Versetzungen von drey Dingen b, c, d

IV. Den einzelnen Complexionen in III setze man a vor. Das giebt die Ordnung a von vier Dingen a, b, c, d. Aus der Ordnung a findet man die Ordnung b, und aus dieser die Ordnung c, und aus dieser die Ordnung d, durch successive Vertauschung der Buchstaben a, b mit b, a und b, c mit c, b und c, d mit d, c, und dadurch alle 24 Versetzungen von 4 Dingen a, b, c, d, wie obenstehen, wo aber die Ordnungen (nach IV) nicht unter, sondern neben einander gesetzt worden sind.

Eben so verfährt man bey mehr gegebenen Dingen und mehrern Ordnungen derselben.

15. Das oben neben II beygefügte Schema der Ordnung I oder a, zeigt durch die eingezeichneten Winkel, daß diese Auflösung zu den involutorischen gehöre (Arch. der Math. H. I. S. 24). Ein anderes gleichfalls involutorisches Verfahren, wo alle Buchstaben (wie hier zwey) für jede Complexion ausgetauscht werden, hat Herr Prof. Klügel (hier S. 53) angegeben. Meine Complexionen gehen unter sich wie wachsende Zahlen fort, und sind zugleich lexikographisch geordnet (Arch. H. II. die Noten zu S. 166, 178).

16. Die erste Auflösung habe ich bereits in meiner Vorrede zu *Rüdig. Specim. anal. de lin. curv. sec. ord. p.* XLVI, XLVII. beschrieben. Bey dieser werden immer Complexionen aus Complexionen abgeleitet, jede nächstfolgende aus der unmittelbar vorhergehenden, und umgekehrt. Ein solches Verfahren ist ganz allgemein und hat etwas Absolutes. Ich habe es daher auch bey andern combinatorischen Operationen in Ausübung gebracht, um so mehr, da es die we-

nigsten data erfordert, und man von jeder gegebenen Complexion, außer der Ordnung, sogleich weiter fortgehen kann. Hier durfte ein (in seiner Art und wegen der Folge) so nützliches Verfahren nicht fehlen; um so mehr, da es an einem Orte steht, wo man es nicht sucht, in einem Buche, das gewiß nur wenige Leser besitzen oder nachschlagen können.

17. Dieses Verfahren, aus jeder gegebenen Complexion die nächstfolgende zu schaffen, ist, bey den Versetzungen, rein combinatorisch. Das ist aber nicht immer der Fall bey andern Operationen, wo man dadurch zuweilen auf arithmetische Summen oder Ergänzungen geführt wird, die für Buchstabencomplexionen nicht immer (wenigstens nicht so unmittelbar) die Bequemlichkeit haben, wie für Zahlencomplexionen. Es war daher nöthig, eine zweyte Auflösung beyzufügen, bey welcher Ordnungen aus Ordnungen, nächstfolgende aus unmittelbar vorhergehenden, gefolgert werden; ein Verfahren, das sich durchgängig, auch bey den übrigen hier aufzuführenden Operationen, reincombinatorisch beweisen wird.

18. Um Weitläuftigkeit zu vermeiden, sollen, wie ich in ähnlichen Fällen (Arch. H. I. S. 25 u. f.) fast lauter Zahlencomplexionen aufgeführt habe, die Anordnungen hier und in der Folge in lauter Buchstabencomplexionen, aufgestellt und zusammengesetzt werden.

(B) Variationen überhaupt, mit Wiederholungen

(Variationes simpliciter, admissis repetitionibus).

18. Aufgabe. Gegebene Dinge oder Elemente

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \\ a & b & c & d & e & f & \ldots \end{pmatrix}$$

zu variiren, oder auf alle mögliche Arten zu zwey, drey, vier u. s. w. in gutgeordnete Classen zusammenzustellen:

(α)

^aA	a	b	c	d
	aa	ab	ac	ad
^aB	ba	bb	bc	bd
	ca	cb	cc	cd
	da	db	dc	dd
	aaa	aab	aac	aad
	.	.	.	.
	ada	adb	adc	add
	baa	bab	bac	bad
	.	.	.	.
^aC	bda	bdb	bdc	bdd
	caa	cab	cac	cad
	.	.	.	.
	cda	cdb	cdc	cdd
	daa	dab	dac	dad
	.	.	.	.
	dda	ddb	ddc	ddd
	aaaa	aaab	aaac	aaad
^aD	u.	s.	w.	

(β)

a a a a
u. a a a b
a a a c
a a b a
a a b b
a a b c
a a c a
a a c b
s. a a c c
a b a a
a b a b
.
a b c c
a c a a
a c a b
.
a c c c
w. b a a a
b a a b
u. s. w.

19. Erste Auflösung. I. Die gegebenen Elemente a, b, c, d setze man, als einzelne Dinge (*Vniones*), in die erste Classe '*A*.

II. Den einzelnen Unionen in '*A* setze man erst a, dann b, dann c, dann d vor. Das giebt zusammen alle Binionen der zweyten Classe '*B*.

III. Den einzelnen Binionen in '*B* setze man wieder erst a, dann b, dann c, dann d vor. Das giebt zusammen alle Ternionen der dritten Classe '*C*.

IV. Eben so erhält man, durch successives Vorsetzen der einzelnen Elemente a, b, c, d, vor alle Ternionen in '*C*, die Quaternionen der vierten Classe '*D*; vor alle Quaternionen in '*D*, die Quinionen der fünften Classe '*E*; u. s. w. alle übrige Variationscomplexionen der folgenden, aus den unmittelbar vorhergehenden, Classen.

20. Zweyte Auflösung. I. Die gegebenen einzelnen Elemente a, b, c, d (gleichsam als so viel einzelne Ordnungen) setze man in die erste Classe '*A*.

II. Den Unionen in '*A* setze man sämtlich das Element a vor. Das giebt die Ordnung a; aus welcher man durch Umtauschung des vorgesetzten a mit b, die Ordnung b; und aus dieser, durch Umtauschung des vorgesetzten b mit c, die Ordnung c; und daraus weiter, durch Umtauschung des vorgesetzten c mit d, die Ordnung d der Binionen der zweyten Classe '*B* findet.

III. Den Binionen in '*B* setze man sämtlich das Element a vor. Das giebt die Ordnung a der Ternionen, und so weiter alle übrige Ordnungen derselben in der dritten Classe '*C*, wenn man (wie in II.) statt der successive vorgesetzten a, b, c nun b, c, d setzt.

IV. Eben so erhält man, durch successives Vorsetzen und Austauschen der Anfangsbuchstaben a, b, c mit b, c, d

der vierten, fünften und folgenden Classen, 'D, 'E u. s. w. sämtliche Ordnungen a, b, c, d, jede nächstfolgende aus der unmittelbar vorhergehenden.

21. Nach der ersten Auflösung (hier 19 und *Nov. Syst. Perm. p.* XXI.) werden Classen aus Classen, nach der zweyten, Ordnungen von Ordnungen (und so mittelbar auch Classen) abgeleitet. Beide Verfahren sind hier rein-combinatorisch, auch gehen ihre Complexionen wie wachsende Zahlen fort, und sind zugleich lexikographisch geordnet. In der Darstellung (18, β) ist ein Element (d) weniger als bey α genommen worden, um nicht die Colonne zu lang zu machen. Das Fortgangsgesetz (für noch so viel Elemente) liegt dennoch klar und deutlich vor Augen.

22. Die Auflösungen (19, 20) der Aufgabe passen beide auf die hier (18, α, β) vorgelegten Schemata. Indessen sind beide Darstellungen sehr von einander verschieden. In der ersten werden für jede einzelne Complexion die vorzusetzenden Elemente mit den übrigen immer ganz in die folgenden Classen hingeschrieben; in der andern werden, für die Comlexionen der ersten Ordnungen a, diese a den zugehörigen Complexionen der vorhergehenden Classe nur vor-, die übrigen Ordnungen aber, ganz ausgeschrieben, darunter gesetzt. Das giebt eine große Verkürzung und zugleich eine Involution in aller Form. Sie stellt, eben so wie jene, Summen von Classen, aber auch einzelne Classen, außer der Ordnung dar, und zeigt beider Zusammenhang durch die figürliche Anordnug mit eingezeichneten Winkeln.

23. Die Variationscomplexionen in (18, α und β) beziehen sich sämtlich auf die einzige Reihe der gegebenen Dinge a, b, c, d . . . von denen also in jeder Classe

alle Combinationen mit allen Versetzungen zugleich vorkommen. Das wird durch

$$'A + 'B + 'C + 'D + 'E \ldots + 'N$$
$$\left(\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\ a, & b, & c, & d, & e & \ldots \end{matrix} \right)$$

angegeben; durch Setzung nehmlich der Classen, mit Beyfügung der einzelnen durch Variation zu verbindenden Elemente im Zeiger.

24. Man kann aber auch, wenn mehrere Reihen von Elementen

$$\left\{ \begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 & \ldots & \\ a, & b, & c, & d, & e, & f & \ldots & = p \\ A, & B, & C, & D, & E, & F & \ldots & = q \\ \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c}, & \mathfrak{d}, & \mathfrak{e}, & \mathfrak{f} & \ldots & = r \\ \mathfrak{A}, & \mathfrak{B}, & \mathfrak{C}, & \mathfrak{D}, & \mathfrak{E}, & \mathfrak{F} & \ldots & = s \\ & \text{u.} & & \text{s.} & & \text{w.} & & \&c \end{matrix} \right\}$$

gegeben sind (wie hier, zeigerförmig beysammenstehen) die Auflösungen (19, 20) ohne alle Schwierigkeit sogleich dahin modificiren, daß jede einzelne Complexion ein Ding dieser Reihen enthält: die Unionen aus p, die Binionen aus q, p, die Ternionen aus r, q, p, die Quaternionen aus s, r, q, p u. s. w. für Variationscomplexionen folgender Classen und mehrerer Elementenreihen. Man darf nur den Elementen a, b, c... die letzte Stelle in den Complexionen die sie (in 18, α, β) schon haben, lassen, in die zweyte Stelle aber A, B, C... und in die dritte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$... und in die vierte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$..., u. s. w. bey Complexionen von mehrern Stellen, setzen, oder, während der Auflösung und Darstellung selbst, zum Vorsetzen und Umtauschen, unmittelbar gebrauchen. Das ändert, wie man sieht, nichts in den Vorschriften der Auflösungen (19, 20) weil man eben so leicht A, B, C... und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$... und $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$... u. s. w. als a, b, c... vorsetzen und umtauschen kann.

25. Auf diese Art erhält man

(α)

^{p}A	a	b	c	d
	Aa	Ab	Ac	Ad
	Ba	Bb	Bc	Bd
^{qp}B	Ca	Cb	Cc	Cd
	Da	Db	Dc	Dd
	aAa	aAb	aAc	aAd
	.	.	.	.
	aDa	aDb	aDc	aDd
	bAa	bAb	bAc	bAd
	.	.	.	.
	bDa	bDb	bDc	bDd
^{rqp}C	cAa	cAb	cAc	cAd
	.	.	.	.
	cDa	cDb	cDc	cDd
	dAa	dAb	dAc	dAd
	.	.	.	.
	dDa	dDb	dDc	dDd
^{srqp}D	𝔄aAa	𝔄aAb	𝔄aAc	𝔄aAd
	u.	s.		w.

(β)

	𝔄	a	A	a
u.	𝔄	a	A	b
	𝔄	a	A	c
	𝔄	a	B	a
	𝔄	a	B	b
	𝔄	a	B	c
	𝔄	a	C	a
	𝔄	a	C	b
	𝔄	a	C	c
f.	𝔄	b	A	a
	𝔄	b	A	b
	.		.	
	𝔄	b	C	c
	𝔄	c	A	a
	𝔄	c	A	b
	.		.	
	𝔄	c	C	c
	𝔅	a	A	a
w.	𝔅	a	A	b
	u.	s.	w.	

und so kommen hier immer die Elemente jeder Reihe gegebener Dinge in eine bestimmte Verticalreihe zu stehen; die Elemente von p in die erste, die von q in die zweyte, die von r in die dritte, die von s in die vierte u. s. w. von der Rechten nach der Linken. Damit man nun gleich sieht, auf welche Reihen sich jedes Classenzeichen bezieht und in welcher Ordnung: so findet man hier die Reihenexponenten p, q, r, s ... (24) in bestimmter Ordnung gleich über die Classenbuchstaben gesetzt.

26. Von diesen so angeordneten Complexionen aus den Elementen mehrerer Reihen, habe ich häufigen Gebrauch in der Anwendung gemacht. Dahin gehören die Tafeln (*Infin. Dign.* p. 172, 177 seq. und *Nov. Syst. Perm.* LXI. und LXIX. seq.). Die Zahlen in den dortigen Zahlencomplexionen sind wirklich variirt, d. i. auf alle mögliche Art combininirt und permutirt. Die Anwendung aber auf mehrere Buchstabenreihen (24, 25) giebt blos Combinationen der Elemente dieser Reihen. Das hebt zugleich eine scheinbare Schwierigkeit, auf welche Herr Prof. Fischer zu Berlin (Ueber den Ursprung der Theor. der Dimens. Zeichen (1794) S. 23) durch ein Misverständniß getroffen ist, indem er glaubt, so wie sich Combinationen, nach meinem Systeme, auf eine einzige Reihe gewöhnlich beziehen, eben so bezögen sich Variationen allemal auf mehrere Reihen; wider (23).

(B) Combinationen überhaupt, mit Wiederholungen.

(*Combinationes simpliciter, admissis repetitionibus*)

27. Aufgabe. Gegebene Dinge oder Elemente

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \\ a & b & c & d & e & f & \ldots \end{pmatrix}$$

zu combiniren, oder, nach zwey, drey, vier u. s. w. verbunden, in gut geordneten Complexionen und Classen darzustellen

(α)

'A	a	b	c	d
	aa	ab	ac	ad
'B		bb	bc	bd
			cc	cd
				dd
	aaa	aab	aac	aad
		abb	abc	abd
			acc	acd
				add
'C		bbb	bbc	bbd
			bcc	bcd
				bdd
			ccc	ccd
				cdd
				ddd
	aaaa	aaab	aaac	aaad
'D	u.	s.	w.	

(β)

	a a a a a
u.	a a a a b
	a a a a c
	a a a b b
	a a a b c
	a a a c c
	a a b b b
	a a b b c
s.	a a b c c
	a a c c c
	a b b b b
	a b b b c
	a b b c c
	a b c c c
	a c c c c
w.	b b b b b
	b b b b c
	u. s. w.

28. Erste Auflösung. I. Die gegebenen Elemente setze man als einzelne Dinge (Vniones) in die erste Classe 'A.

II. Der Union a (in 'A) und allen folgenden, setze man a; dann der Union b und allen folgenden, b; dann der Union c und allen folgenden, c; u. s. w. vor. Das giebt zusammen die Binionen der zweyten Combinationsclasse 'B.

III. Den Binionen in 'B der Ordnung a und aller folgenden, setze man a; denen der Ordnung b und aller folgenden, setze man b; denen der Ordnung c und aller folgenden, setze man c; u. s. w. vor. Das giebt zusammen die Ternionen der dritten Combinationsclasse 'C.

IV. Eben so findet man, durch successives Vorsetzen der einzelnen Elemente a, b, c... (immer von den Complexionen der Ordnung anfangend, die mit dem vorzuschreibenden Buchstaben gleichnamig ist) die Combinationsclassen 'D, 'E u. s. w. jede folgende aus der nächstvorhergehenden.

29. Zweyte Auflösung. I. Die gegebenen einzelnen Elemente (gleichsam als so viel einzelne Ordnungen) setze man in die erste Classe 'A.

II. Den Unionen in 'A setze man sämtlich das Element a vor. Das giebt die Ordnung a; aus welcher man, durch Umtauschung des vorgesetzten a mit b (von der Binion an, wo zuerst zwey verschiedene Elemente vorkommen) die Ordnung b; und aus dieser, durch Umtauschung des vorgesetzten b mit c (von der Binion an, wo zuerst zwey verschiedene Elemente vorkommen) die Ordnung c; und daraus eben so die Ordnung d; u. s. w. der Binionen der zweyten Classe 'B findet.

III. Eben so findet man,

1) die Ordnung a der dritten, vierten.... überhaupt der nten Classe, wenn man den sämtlichen Complexionen der (n—1)ten Classe, a vorsetzt;

2) die Ordnungen b, c, d... der nten Classe, aus den Ordnungen a, b, c... derselben Classe, wenn man in den Complexionen der nächstvorhergehenden Ordnungen (von da an, wo zuerst die beiden Anfangsbuchstaben nicht einerley sondern verschieden sind) in die Stelle des ersten dieser beiden Anfangsbuchstaben den nächstfolgenden Ordnungsbuchstaben setzt.

30. Die Auflösung (28) für die Combinationen ist von der für die Variationen (19) blos darin unterschieden, daß die Buchstaben b, c, d... hier nicht (wie

dort) allen Complexionen der vorhergehenden Classen für die folgenden vorgesetzt werden. Die Auflösung (29) ist mit der in (20) was die Bestimmnng der Ordnung a in jeder Classe anbetrifft, vollkommen einerley, und weicht nur bey den übrigen Ordnungen ab, bey denen nicht alle Complexionen der vorhergehenden gebraucht werden. Beide Auflösungen, nachdem man die figürliche Anordnung bey ihnen so oder anders (22) trifft, führen auf die Darstellungen (27, α, β).

31. Die Auflösung (28) habe ich (*Nov. Syst. Perm. p.* XIX, 10) aus einer noch allgemeiner ausgedruckten (Ebend. 8) abgeleitet. Die Darstellungen (27, α, β) gehen übrigens, wie jene der Variationen (18) wie wachsende Zahlen fort und sind zugleich lexikographisch geordnet (Arch. der Math. H. II. S. 178. Note).

(C) Variationen zu bestimmten Summen, mit Wiederholungen.

(*Variationes numeri propositi, admissis repetitionibus*)

32. Involutorische Darstellungen von andern combinatorischen deutlich zu unterscheiden, sollen hier und in der Folge *J*, $\mathfrak{J}$ und J, **$\mathfrak{J}$** jene für Variationen diese für Combinationen, gebraucht werden (Arch. der Math. H. IV. S. 417, 418). Die einzelnen Ordnungen der lexikographischen Folge, werden durch $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}\ldots$ oder **A**, **B**, **C**... angedeutet (Ebend. S. 396, 15 und Note, ingl. S. 430, 9).

23. Aufgabe. Die Variationen zu bestimmten Summen, aus den Elementen

$$\left(\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\ a & b & c & d & e & \ldots \end{matrix}\right)$$

in gutgeordneten Classen darzustellen.

Classen-Complex. für ^5J		Lexikogr. Complex. für ^5J	
e	^5A	^5A	a a a a a
ad			a a a b
bc	^5B		a a b a
cb			a a c
da			a b a a
aac			a b b
abb			a c a
aca	^5C		a d
bab		^5B	b a a a
bba			b a b
caa			b b a
aaab			b c
aaba	^5D	^5C	c a a
abaa			c b
baaa		^5D	d a
aaaaa	^5E	^5E	e

u. s. w.

34. Auflösung für $^5J = {^5A} + {^5B} + {^5C} + {^5D} + {^5E}$

I. Das 5te Element e setze man, als einzelnes Ding, in die erste Classe ^5A.

II. Die Complexionen der zweyten und aller folgenden Classen bestimme man nach ihren Ordnungen:

1) Die Ordnung a der nten Classe zu finden, setze man jeder Complexion der $(n - 1)$ten Classe a vor, und vertausche den letzten Buchstaben der Complexion mit dem nächstvorhergehenden des Zeigers.

2) Die so gefundene Ordnung a giebt die Ordnung b, diese die Ordnung c, u. s. w. derselben nten Classe, wenn man successive in den Complexionen der nächstvorhergehenden Ordnung, mit Uebergehung derer, die sich mit a en-

digen, den ersten Buchstaben jeder Complexion mit dem nächstfolgenden des Zeigers, den letzten hingegen mit dem nächstvorhergehenden vertauscht.

III. So findet man aus e in ${}^5\mathfrak{A}$ (nach II, 1) ad, und daraus (II, 2) bc, und daraus cb, und daraus da, die Ordnungen der zweyten Classe, deren jede hier nur aus einer Complexion besteht. Eben so ergeben sich die Ordnungen mit ihren Complexionen der dritten, und übrigen Classen.

35. Die Auflösung (34) ist einerley mit der (in 20) nur daß hier noch die letzten Buchstaben der Complexionen verändert werden, welches dort nicht nöthig war. Man hätte auch die Elemente a, b, c ... den Complexionen nach (19) vorsetzen, und die zugehörige Umtauschung des letzten Elements vornehmen können. Dadurch aber würde die Auflösung an Simplicität und Leichtigkeit etwas verlohren, dieselbe auch nicht reincombinatorisch, wie die hier (34) aufgeführte, geblieben seyn.

36. Auflösung für

$$ {}^5\mathfrak{J} = {}^5\mathfrak{A} + {}^5\mathfrak{B} + {}^5\mathfrak{C} + {}^5\mathfrak{D} + {}^5\mathfrak{E} $$

Die Complexionen zur Summe n werden hier aus denen zur Summe (n—1) auf folgende Art abgeleitet.

I. Man setze allen einzelnen Complexionen der nächstvorhergehenden Summe (n—1) das Element a vor.

II. Man vertausche, in allen Complexionen der Summe (n—1), das erste Element derselben mit dem nächstfolgenden des Zeigers, und schreibe jede Complexion, die diese Vertauschung giebt, in ihrer Ordnung, unter die Complexionen die I schon vorher gegeben hat.

37. Da bey den Buchstabencomplexionen zu bestimmten Summen, diese Summen sich auf die Ordnungszahlen beziehen, wie sie im Index oder Zeiger, (33) über den Buchstaben stehen: so erhellet deutlich, daß wenn man das Element a (oder 1) im ersten Winkel (33) setzt, man, nach dem obigen Verfahren (I, II) von da auf die Summe 2, und von dieser auf die Summe 3 u. s. w. auf die Summen 4, 5 . . . n successive fortschreitet. Diese involutorische Succession, nach welcher man vorhergehende und folgende Werthe in und um einander schreibt, ist gleichwohl mit einer absoluten Independenz vollkommen gleichgültig (Arch. der Math. H. III. S. 324, c) und so schreibt man nach ihr Summen von Classen eben so leicht als einzelne Classen, und umgekehrt, oder vielmehr, eins ist mit dem andern zugleich gegeben und innigst verbunden.

38. Von diesem Variationsproblem zu bestimmten Summen (33) meine erste Auflösung (*Infinit. Dign.* p. 129—135) für Summen von Classen, so wie für einzelne Classen. Eine zweyte Auflösung von mir hat Herr Mag. Toepfer (Comb. Anal. S. 77—80) beschrieben. Beide sind leicht und ganz allgemein, aber nicht reincombinatorisch, wie die hier (34, 36) beschriebenen, von denen ich die letztere zuerst in meinem Programm: Terminorum &c (der Titel steht hier S. 163) p. IV, 2 und im Arch. der Math. (H. IV. S. 393, A) in Zahlencomplexionen aufgeführt habe. Von diesen vier ganz verschiedenen Verfahren geben, das erste Classen aus Classen, das zweyte Complexionen aus Complexionen, das dritte Ordnungen aus Ordnungen, das vierte Summenwerthe aus Summenwerthen; durchgängig nächstfolgende aus unmittelbar vorhergehenden. Die nähere Betrachtung der combinatorischen Operationen, besonders der Involutionen,

führt diese Unterschiede von selbst herbey. Man vergleiche Arch. der Math. H. II. S. 183, 18, I.

39. Die Variationen zu bestimmten Summen, die ich bisher nur auf eine Reihe a, b, c, d... (33) bezogen habe, können eben so, wie jene (an sich oder überhaupt, simpliciter) auf mehrere Reihen (24.26) bezogen werden; auch habe ich davon (*Infin. Dignit.* §. XXVII. p. 127—145 und *Nov. Syst. Perm.* p. LXX. seq.) häufig Gebrauch gemacht, und solches bey den Classenzeichen sowohl, als bey der darstellenden Entwickelung nachgewiesen. Wählt man für die mehrern Reihen p, q, r, s den Zeiger, wie in (24), wozu ich itzt noch die Reihe α, β, γ, δ, ε ... = t fügen will: so stehen, für die Summe 5 oder ${}^5J$ (33) die Zahlen- und Buchstabencomplexionen nebst ihren Classenzeichen und den überschriebenen Reihenexponenten p, q, r, s, t, wie folget;

p	p	p
5	${}^5A$	e
q—		q—
14		Ad
23	qp	Bc
32	${}^5B$	Cb
41		Da
r—		r—
113		aAc
122		aBb
131	rqp	aCa
212	${}^5C$	bAb
221		bBa
311		cAa
s—		s—
1112		𝔄aAb
1121	srqp	𝔄aBa
1211	${}^5D$	𝔄bAa
2111		𝔅aAa
t—	tsrqp	t—
11111	${}^5E$	α𝔄aAa

Zuweilen sind auch einige der Reihen p, q, r, s, t . . . Glied für Glied einander gleich. Wäre z. B. p = q; s = t; . . . so käme hier:

$$ {}^5J = {}^5\overset{p}{A} + {}^5\overset{p^2}{B} + {}^5\overset{rp^2}{C} + {}^5\overset{srp^2}{D} + {}^5\overset{s^2rp^2}{E} $$

40. Für eben die Reihen p, q, r, s, t (39), eben so gebraucht, aber auf ${}^5J$ (in 33) angewendet, fände man die Zahlen- und Buchstabencomplexionen, wie folget:

1|1|1|1|1	α|𝔄|a|A|a
1|1|1|2	α|𝔄|a|b
1|1|2 1	α|𝔄|B|a
1|1|3	α|𝔄|c
1|2 1 1	α|𝔟 A a
1|2 2	α|𝔟 b
1|3 1	α|C a
1|4	α|d
2 1 1 1	𝔅 a A a
2 1 2	𝔅 a b
2 2 1	𝔅 B a
2 3	𝔅 c
3 1 1	c A a
3 2	c b
4 1	D a
5	e

Hier stehen nämlich in der ersten Buchstabencomplexion die Anfangsbuchstaben der Alphabete für die Reihen ... t, s, r, q, p in ihrer Ordnung; jeder (nach 36, I) vorzuschreibende erste Buchstabe, wird aus dem nächstfolgenden, noch nicht gebrauchten, Alphabete genommen, jeder (nach 36, II) durch Umtauschung zuzusetzende hingegen, aus dem Alphabete, wohin der auszutauschende gehört. Das nenne ich, die Reihen p, q, r, s, t... hier eben so ge-

brauchen, wie in (33). Die Buchstabencomplexionen kommen hier gleichwohl mit den dortigen nicht in dem Umstande überein, daß in einerley Stellen Buchstaben desselben Alphabets durchgängig vorkämen. Mit einem Worte, die Zahlencomplexionen in (39, 40) sind blos der Form, die Buchstabencomplexionen (Ebendas.) hingegen, der Form und Materie nach verschieden. Von beider Gebrauch und Anwendung, in der Folge.

(D) Combinationen zu bestimmten Summen, mit Wiederholungen.

(*Combinationes numeri propositi, admissis repetitionibus*)

41. Aufgabe. Die Combinationen zu bestimmten Summen, aus den Elementen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \ldots \\ a & b & c & d & e & f & g \ldots \end{pmatrix}$$

in gutgeordneten Complexionen und Folgen derselben darzustellen.

Classen-Compl. für ⁷J			Lexikographische Complexionen für ⁷J		
⁷A	g af	⁷A	a a a a a a a a a a a a b a a a a c a a a b b a a a d a a b c a a e a b b b a b d a c c a f	⁷A	aaaaaaa
⁷B	be cd			⁷B	baaaaa bbaaa bbba
⁷C	aae abd acc bbc			⁷C	caaaa cbaa cbb cca
⁷D	aaad aabc abbb			⁷D	daaa dba dc
⁷E	aaaac aaabb	⁷B	b b c b e	⁷E	eaa eb
⁷F	aaaaab	⁷C	c d	⁷F	fa
⁷G	aaaaaaa	⁷G	g	⁷G	g

42. Auflösung für

$^7J = {}^7A + {}^7B + {}^7C + {}^7D + {}^7E + {}^7F + {}^7G.$

I. Das 7de Element g setze man, als einzelnes Ding, in die erste Classe ⁷A.

II. Die Complexionen der zweyten und aller folgenden Classen bestimme man nach ihren Ordnungen:

1) die Ordnung a der nten Classe zu finden, setze man jeder Complexion der (n—1)ten Classe (mit Uebergehung derer, die am Ende zwey oder mehr gleiche Elemente haben) a vor, und vertausche den letzten Buchstaben der Complexion mit den nächstvorhergehenden des Zeigers.

2) Die so gefundene Ordnung a giebt die Ordnung b, diese die Ordnung c u. s. w. derselben nten Classe,

wenn man successive in den Complexionen der nächstvorhergehenden Ordnung (mit Uebergehung derjenigen Complexionen, welche entweder zwey oder mehr gleiche Anfangs- oder zwey oder mehr gleiche Endelemente, eins oder beides zusammen, haben) den ersten Buchstaben jeder Complexion mit dem nächstfolgenden, den letzten hingegen mit dem nächstvorhergehenden (in beiden Fällen, des Zeigers nicht der Complexion) vertauscht.

III. So findet man aus g in ${}^7A$ (nach II, 1) af, und daraus (II, 2) be, und daraus cd (weiter darf man hier nicht gehen, weil die Binionen dc, eb, fa nicht gut geordnet wären, und auch schon durch die vorhergehenden dargestellt sind) die Ordnungen der zweyten Classe, deren jede hier nur aus einer Complexion besteht. Eben so ergeben sich die Ordnungen mit ihren Complexionen der dritten und übrigen Classen.

43. Auflösung für

$${}^7\mathfrak{J} = {}^7\mathfrak{A} + {}^7\mathfrak{B} + {}^7\mathfrak{C} + {}^7\mathfrak{G}$$

Die Complexionen zur Summe n werden hier aus denen zur Summe (n—1), auf folgende Art abgeleitet:

I. Man setze allen einzelnen Complexionen der Summe (n—1) das Element a vor.

II. Man vertausche in den Complexionen der Summe n—1, (mit Uebergehung derer, welche zwey oder mehr gleiche Anfangselemente haben) das erste Element mit dem nächstfolgenden höhern Elemente des Zeigers, und schreibe jede Complexion, die diese Vertauschung giebt, in ihrer Ordnung, unter die Complexionen die I schon vorher gegeben hat.

44. Auflösung für

$${}^7\mathfrak{J} = {}^7\mathfrak{A} + {}^7\mathfrak{B} + {}^7\mathfrak{C} + {}^7\mathfrak{D} + {}^7\mathfrak{E} + {}^7\mathfrak{F} + {}^7\mathfrak{G}$$

I. Man setze allen einzelnen Complexionen der nächstvorhergehenden Summe (n—1), das Element a vor.

II. Man vertausche (aber nur in denjenigen Complexionen der Summe (n—1), bey denen die beiden ersten Elemente nicht einerley, sondern verschieden sind) das erste Element solcher Complexionen, mit dem nächstfolgenden des Zeigers, und füge solchem die übrigen Elemente der Complexion unverändert bey.

III. Die Complexionen (die I und II geben) mische man so unter einander, daß man zu jeder Complexion aus I die aus II setzt, wenn es dergleichen giebt. Giebt es keine in II (wenn nämlich der Complexion zur Summe n-1 erste beide Elemente nicht verschieden sind) so setzt man blos die aus I, und geht gleich zur folgenden Complexion der Summe (n—1) fort.

45. Die drey (in 41) aufgeführten Darstellungen sind dieselben in Buchstaben, die Herr Prof. Klügel (hier S. 59) in Zahlen vorgetragen hat, nur daß die dortige erste hier die letzte ist. Die Gesetze ihrer Entwickelung zeigen (42, 43, 44). Eine andere, von der (in 44) verschiedene, independente sehr leichte Auflösung, die aber nicht rein-combinatorisch ist, steht im Arch. der Math. H. IV. S. 404, 24, A. Die übrigen beiden Auflösungen (42, 43) sind blos beschränkte von denen (in 34, 36), wie beider Vergleichung sogleich zeigt. Auch hier kommt man (wie in 37 wegen 33 bemerkt worden ist) bey der Auflösung (43) nach und nach von der Summe 1 auf die Summe 2, von da auf die Summe 3 u. s. w. auf die Summe n, daß also auch hier diese involutorische Succession mit einer absoluten Independenz vollkommen gleichgültig ist.

46. Das Combinationsproblem zu bestimmten Summen nach Classen (42) ist das erste, auf das ich verfiel, und das mir Gelegenheit gab, in der Folge weiter zu gehen. Meine erste Auflösung davon (*Infin. Dign.* §. XII. p. 73-91) für Summen von Classen, so wie für einzelne Classen. Meine zweyte (Toepf. comb. Anal. S. 80-90). Beide sind leicht und ganz allgemein, aber nicht rein-combinatorisch, wie die in (42, 43, 44). Die Auflösung (43) habe ich zuerst in dem oben (S. 163) genannten Programm, und nachher im Arch. der Math. (H. IV. S. 392, 393) vorgelegt; die (in 44) ist die Boscovichische (Ebendas. S. 405). Auch hier werden, wie bey den ähnlichen Verfahren für die Aufgabe (33) verschiedentlich, Classen aus Classen, oder Complexionen aus Complexionen, oder Ordnungen aus Ordnungen, oder endlich Summenwerthe aus Summenwerthen, durchgängig nächstfolgende aus unmittelbar vorhergehenden, abgeleitet und rein-combinatorisch entwickelt.

47. Gewöhnlich hat man bey Entwickelung und Darstellung der Combinationsclassen nur auf eine Reihe a, b, c, d... = p zu sehen, und diese wird im Zeiger angegeben, so, daß es keiner weitern Nachweisung bey den Classen selbst bedarf. Für die Fälle hingegen, wo die Combinationsclassen in der Formel, die das Resultat einer Aufgabe enthält, sich auf mehrere Reihen p, q, r, s... (24) beziehen, müssen diese Zeichen, als Reihenexponenten, über die Classenzeichen gesetzt werden: ${}^{n}\overset{p}{A}$, ${}^{n}\overset{p}{B}$... ${}^{m}\overset{q}{A}$, ${}^{m}\overset{q}{B}$... u. s. w. bey den übrigen (*Nov. Syst. Perm.* p. XLV, 21). Zuweilen kommen auch ${}^{n}\overset{p}{A}$, ${}^{n}\overset{qp}{B}$, ${}^{n}\overset{rqp}{C}$... vor.

(E) Classen ausser der Ordnung, für Variationen und Combinationen zu bestimmten Summen, mit Wiederholungen.

48. Classen zu bestimmten Summen lassen sich eben so leicht außer der Ordnung geben, wie bey Variationen und Combinationen an sich, und ihre figürliche Anordnung zeigt gleichfalls eine combinatorische Involution, die hier durch Winkel bemerklich gemacht werden soll.

49. **Aufgabe.** Die Elemente seyen, wie vorher,

$$\left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\ldots \\ a & b & c & d & e & f & g\ldots \end{array}\right)$$

Man soll die vierte Variationsclasse zur Summe 6 aus a, b, c; und die vierte Combinationsclasse zur Summe 10 aus a, b, c, d, e, f, g darstellen.

^{6}D

a|a|a|c
a|a|b b
a|a|c a
a|b a b
a|b b a
a|c a a
b a a b
b a b a
b b a a
c a a a

^{10}D

a|a|a|g
a|a|b f
a|a|c e
a|a|d d
a|b b e
a|b c d
a|c c c
b b b d
b b c c

50. **Auflösung** für die Variationsclasse ^{6}D.

I. Man setze c, das höchste der gegebenen Elemente, als ein einzelnes Ding, im Winkel.

II. Daneben setze man das erste Ding a. Das giebt ac, die Ordnung a der Dinge a, c. Aus der Ordnung a findet man (34, II, 2) die Ordnung b, und daraus die Ordnung c, der Binionen ac, bb, ca.

III. Den einzelnen Binionen in II setze man a vor. Das giebt die Ordnung a der Ternionen; und daraus findet man weiter (nach 34, II, 2) die Ordnung b und daraus die Ordnung c der zugehörigen Ternionen.

IV. Eben so geht man zu den Quaternionen für ^6D fort, und so auch zu den Verbindungen von mehr als vier Dingen, für spätere Classen; alles wie in (34), nur mit dem einzigen Unterschiede, daß man bey der Vorsetzung von a (bey Bestimmung der Ordnung a) das letzte Element der Complexion hier nicht (wie dort) mit dem nächstvorhergehenden Zeigerelemente vertauscht; wohl aber in den folgenden Ordnungen b, c....

51. Auflösung für die Combinationsclasse ^{10}D

I. Man setze g, das höchste der gegebenen Elemente, als ein einzelnes Ding, im Winkel.

II. Daneben setze man das erste Ding a. Das giebt ag, die Ordnung a der Dinge a, g. Aus der Ordnung a findet man (42, II, 2) die Ordnung b, und daraus die Ordnung c und daraus die Ordnung d der Binionen ag, bf, ce, dd.

III und IV. Das Verfahren für den Fortgang ist hier eben so, wie in 50, III, IV; nur daß hier (42) statt des dortigen (34) zu citiren. Auch hier wird bey der Vorsetzung von a das letzte Element nicht mit dem nächstvorhergehenden vertauscht, wohl aber in den folgenden Ordnungen b, c....

Die Darstellungen für ${}^{6}D$ und ${}^{10}D$ (in 49) involutorisch zu machen, beobachtet man, beym Schreiben der Ordnungen a, b, c... die Vorschrift (22).

52. Von der grossen Mannichfaltigkeit und leichten Umwandlung combinatorischer Formen, findet man viele Beyspiele im Arch. der Math. wovon ich hier nur (H. I. S. 31—43 und H. II. S. 183—192) anführen will. Hier sind noch ein Paar andere für ${}^{10}D$ in (49)

(α)		(β)		(γ)		(δ)	
111	7	a^3	7	000	6	a^3	6
11	26	a^2	26	00	15	a^2	15
11	35		35	00	24		24
11	44		44	00	33		33
1	225	a^1	225	0	114	a^1	114
1	234		234	0	123		123
1	333		333	0	222		222
	2224	a^0	2224		1113	a^0	1113
	2233		2233		1122		1122

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ a & b & c & d & e & f & g \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a & b & c & d & e & f & g \end{pmatrix}$$

53. Bey den hier gebrauchten Zahlencomplexionen fallen die in Winkeln eingeschlossenen Summen sogleich deutlich ins Auge. Die a^3, a^2, a^1 deuten hier blosse Nebeneinanderstellungen von a an, nach der beygefügten Zahl (diese Zahlen sind nemlich hier keine Potenz- sondern Wiederholungsexponenten) und a^0 zeigt, dass kein a weiter in der Verbindung vorkommt. Man erhält γ aus α wenn man von jeder Zahl in α Eins abzieht, wodurch also der Zeiger $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots \\ a, & b, & c & \ldots \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots \\ a, & b, & c & \ldots \end{pmatrix}$ abgeändert wird. Hier hat man nun die Zerlegung einer

gegebenen Classe in Summen von Classen (das Umgekehrte von 27, β), mit dem Unterschiede

$$\text{daß } {}^{10}D = a^3\,{}^{7}A + a^2\,{}^{8}B + a^1\,{}^{9}C + a^0\,{}^{10}D$$

$$\left(\begin{matrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ b & c & d & e & f & g \end{matrix}\right)$$

$$\text{und } {}^{10}D = a^3\,{}^{6}A + a^2\,{}^{6}B + a^1\,{}^{6}C + a^0\,{}^{6}D$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ b & c & d & e & f & g \end{matrix}\right)$$

jenes bey α, β, dieses bey γ, δ. Die steigenden Summen 7, 8, 9, 10 der Classen nach dem ersten Zeiger, werden also auf eine und dieselbe (kleinere) Summe 6, durch den zweyten Zeiger reducirt, und so alles in das gewöhnliche Gleis eingeleitet.

Das wird zugleich das (*Infin. Dignit. p.* 141, 142 in der Note, und *Nov. Syst. Perm. p.* XXII, 18) von Variationen Beygebrachte weiter aufklären. Von Umänderung der Formen durch Zusetzen oder Abziehen gewisser Zahlen (wie hier der Eins) Arch. der Math. Heft I. S. 41, 42. Von der Zerfällung einzelner höherer Combinationsclassen in Summen aus niedrigern, mit Veränderung des Zeigers, *Nov. Syst. Perm. p.* LV, LVI. Das dortige n ist hier 6.

54. Bey Classen von vielen Complexionen kann man, um die Colonne nicht zu lang zu machen, die einzelnen Ordnungen derselben neben einander setzen, auch zur Verkürzung, wenn man will, sich der Wiederholungsexponenten bey b, c, d ... (eben so, wie in 52, 53 bey a) bedienen, die sich bey der Ableitung der Ordnungen aus einander (42, II, 2) von selbst ergeben.

Die erste Complexion in ${}^{15}E$ ist 1 1 1 1 11 (nach 52, α) und 0 0 0 0 10 (nach 52, γ). Das giebt

$$^{15}E = a^4\,{}^{10}A + a^3\,{}^{10}B + a^2\,{}^{10}C + a^1\,{}^{10}D + a^0\,{}^{10}E$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & 9 & 10 & 11 \\ a & b & c & \ldots & i & k & l \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & 8 & 9 & 10 \\ b & c & d & \ldots & i & k & l \end{pmatrix}$$

und daraus folgt (der erste Zeiger gilt für ^{15}E)

$$^{15}E = \begin{array}{l} a^4 \left| \begin{array}{l} l \end{array} \right. \\ \\ a^3 \left| \begin{array}{l} bk \\ ci \\ dh \\ eg \\ f^2 \end{array} \right. \end{array} + a^2 \left| \begin{array}{l} b^2 i \\ bch \\ bdg \\ bef \\ c^2 g \\ cdf \\ ce^2 \\ d^2 e \end{array} \right. + a^1 \left| \begin{array}{l} b^3 h \\ b^2 cg \\ b^2 df \\ b^2 e^2 \\ bc^2 f \\ bcde \\ bd^3 \\ c^3 e \\ c^2 d^2 \end{array} \right. + a^0 \left| \begin{array}{l} b^4 g \\ b^3 cf \\ b^3 de \\ b^2 c^2 e \\ b^2 cd^2 \\ bc^3 d \\ c^5 \end{array} \right.$$

Die Zahlencomplexionen von ^{15}E, nach dem ersten Zeiger, findet man (*Infin. Dign. p.* 80, 81).

Weil hier die Wiederholungen von a (als Ergänzung der Dimensionen in den einzelnen Ordnungen) im Voraus vorgeschrieben werden, so kann a, und mithin auch sein Zahlenwerth 0, im zweyten Zeiger ganz übergangen werden. Ein Beyspiel ähnlicher Wiederholungen eines Buchstabens (b, wie hier a) findet man (*Infin. Dign. p.* 41) bey Combinationen an sich (simpliciter). Man vergleiche die erste Tafel (Ebend. p. 157).

55. Man kann auch nach dem (*Infin. Dign. p.* 26) gegebenen Beyspiele, außer den Wiederholungen von a, noch die Verbindungen von b, c, d, e... von den übrigen absondern. Die Ableitung der Ordnungen aus einander (42, II) führt auch hier unmittelbar darauf; und so kommt:

	a^4	l	$+ a^2$	b	bi	$+ a^1$	bb	bh	$+ a^0$	bbb	bg
	a^3	bk			ch			cg			cf
${}^4E =$		ci			dg			df			de
		dh			ef			ee		bbc	ce
		eg		c	cg		bc	cf			dd
		ff			df			de		bcc	cd
					ee		bd	dd		ccc	ce
				d	de		cc	ce			
								dd			

56. Man kann also bey solchen Darstellungen der einzelnen Classen (wie hier in 54, 55) durch die Absonderung von a, mehrere a (ihre Wiederholungen) auf einmal, wie vorher (51) einzelne a vorschreiben. Die Darstellung für jede zu entwickelnde Classe lehrt jedesmal, wie weit man mit den Wiederholungen von a fortgehen muß, die, für andere Classen und andere Summen, nicht immer bis auf a^0 herunterfallen. Die zunächst, auf die Wiederholungen von a folgenden Verbindungen von b, c, d... von bb, bc... von bbb, bbc... u. s. w. befolgen das combinatorische Gesetz in 27 (S. 174, α) nur daß man hier b, c, d... für die dortigen a, b, c... schreiben, oder den Zeiger $\left(\begin{smallmatrix}1 & 2 & 3 & \ldots \\ b, & c, & d & \ldots\end{smallmatrix}\right)$ für den dortigen $\left(\begin{smallmatrix}1 & 2 & 3 & \ldots \\ a, & b, & c & \ldots\end{smallmatrix}\right)$ nehmen muß. Von diesen Verbindungen hängen die unmittelbar auf sie folgenden Binionen im Winkel ab; und so gewährt hier die Combinationslehre einen Ueberblick des Ganzen aus seinen einzelnen Theilen, den man auf keinem andern Wege in der Kürze und Vollkommenheit, so deutlich und anschaulich, haben kann.

57. Ein Beyspiel einer gemischten (nicht ganz rein-combinatorischen) Darstellung hier zu geben, was

die Bestimmung der Complexionen dienen, die Herr Prof. Klügel (hier S. 61) aufgestellt hat.

Aufgabe. Die Complexionen der lexikographischen Ordnungen 2, 3, 4, 5 u. s. w. für ${}^{2n}\mathfrak{J}$ und ${}^{2n+1}\mathfrak{J}$, von der Ordnung 1 unabhängig, zu entwickeln.

Complexionen für ${}^{2n}\mathfrak{J}$
(2, 3, 4, 5, 6 ...)

2 2 2 2 2 2
2 2 2 2 4
2 2 2 3 3
2 2 2 6
2 2 3 5
2 2 4 4
2 2 8
2 3 3 4
2 3 7
2 4 6
2 5 5
2 10
3 3 3 3
3 3 6
3 4 5
3 9
4 8
5 7
6 6
12

u. s. w.

Complexionen für ${}^{2n+1}\mathfrak{J}$
(2, 3, 4, 5, 6 ...)

2 2 2 2 2 3
2 2 2 2 5
2 2 2 3 4
2 2 2 7
2 2 3 3 3
2 2 3 6
2 2 4 5
2 2 9
2 3 3 5
2 3 4 4
2 3 8
2 4 7
2 5 6
2 11
3 3 3 4
3 3 7
3 4 6
3 5 5
3 10
4 4 5
4 9
5 8
6 7
13

u. s. w.

58. Auflösung. Die Complexionen der niedrigsten Summen sind, für gerade Zahlen $\begin{array}{c|c} 2 & 2 \\ 4 & \end{array}$, für ungerade Zahlen $\begin{array}{c|c} 2 & 3 \\ 5 & \end{array}$. Daraus lassen sich die Complexionen höherer Summen für beide, folgendergestalt herleiten:

I. Man setze allen Complexionen der vorhergehenden niedrigern Summe, 2 vor. Das giebt die Ordnung 2 der folgenden höhern Summe.

II. In den so gefundenen Complexionen, vertausche man (mit Uebergehung aller derer, wo die beiden ersten oder letzten Zahlen, eins oder beides, nicht verschieden sind) die erste Zahl mit der nächstfolgenden, die letzte mit der nächstvorhergehenden des Zeigers. Das giebt die Ordnung 3 derselben Summe.

III. Dasselbe Verfahren auf die (nach II) gefundenen Complexionen angewendet, giebt die Complexionen der Ordnung 4 aus denen der Ordnung 3 u. s. w. alle folgende Ordnungen aus den nächstvorhergehenden.

IV. Sobald man, bey Anwendung von II und III, auf eine Complexion verfällt, die nur aus zwey, gleichen oder um eins verschiedenen, Zahlen besteht, so nimmt man beider Summe, und setzt sie als letzte Complexion dieser Summe darunter.

Auf ähnliche Art kann man von der Ordnung 3 oder 4... oder m anfangen, und auf die Ordnungen $m+1$, $m+2$ u. s. w. fortgehen.

59. Wegen des Umstandes (58, IV) gehört das Verfahren zu den gemischten, und hat für Zahlencomplexionen keinen Anstoß. Um es auf Buchstabencomplexionen anzuwenden, darf man nur, auf diesen einzigen Fall, den Index vor Augen haben; alles Uebrige geht sonst rein-combinatorisch fort, wo der Gebrauch der Buchstaben gleiche Bequemlichkeit mit dem der Zahlen hat (17). Man hätte die Auflösung der Aufgabe (57) auch so geben können, daß man jede nächstfolgende Complexion aus der unmittelbar vorhergehenden abgeleitet hätte; aber hierbey würden sich, zu jenen arithmetischen Summen (58, IV) auch noch arithmetische Ergänzungen eingefunden haben, und so das combinatorische Verfahren, bey aller Leichtigkeit an sich, doch minder rein, als das in (58) geworden seyn. Die Darstellungen (in 57) enthalten alle (S. 61) vorkommende Complexionen der Summen 8, 9, 10 und noch mehrere, in einer lexikographischen Involution.

60. Ein Beyspiel, wie schnell die combinatorischen Formen (was für die Analysis so wichtig ist) sich in einander umwandeln lassen, mögen die (S. 59) von Herrn Professor Klügel aufgestellten drey Anordnungen zur Summe 7 abgeben. Von diesen ist die dritte die leichteste in der Entwickelung (S. 60. Note e). Aus ihr formt man die zweyte, wenn man von oben herunter gehend, erst die einzifrige (hier 7) dann die zweyzifrigen (1, 6 und 2, 5 und 3, 4) dann die drey- dann die vier- u. s. w. zifrigen Complexionen zusammenliest, die gleichvielzifrigen jedesmal in eine Classe zusammensetzt, und die letzte mit 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 (der einzigen siebenzifrigen Complexion) beschließt. Aus dieser zweyten Anordnung schafft man sogleich die erste, wenn man in der zweyten, von unten herauf steigend und rückwärts lesend, alle diejenigen Complexionen in eine Ordnung zusammensetzt, die (in dieser

zweyten) mit 1, oder 2, oder 3, u. s. w. mit 7, sich enden, und folglich mit diesen Elementen in der ersten anfangen. Man vergleiche die Anmerkung (S. 60). Auf ähnliche Art wird (Arch. der Math. H. II. S. 188) eine andere lexikographische Darstellung in eine Classenanordnung umgestaltet, oder, wie man sagen könnte, umgelesen.

61. Ich habe von den combinatorischen Operationen hier nur das Unentbehrlichste vorgetragen, das, was theils des Zusammenhangs, theils des Folgenden wegen, da seyn mußte. Die Operationen, wo Wiederholungen der Elemente verstattet sind, sind für die Analysis bey weitem die wichtigsten. Aus den Vorschriften für diese folgen zugleich die, wo keine Wiederholungen vorkommen dürfen; daher ich mich dabey so wenig aufhalte, als bey der Verschiedenheit der Zeiger, in Absicht auf die Folge oder Menge ihrer Elemente. Von der lexikographischen oder alphabetischen Darstellung, habe ich nur die zu bestimmten Summen hier (33, 41) aufgeführt. Ueberall sind hierbey Involutionen vorzüglich bequem, die hier nicht durchgängig durch eingezeichnete Winkel bemerklich gemacht worden sind; dahin z. B. die (27, α) aufgeführte gehört, eine der wichtigsten, die (*Infin. Dign. p.* 17, 18) etwas weiter ausgeführt ist, und sehr mannichfaltige Abschnitte durch einzuzeichnende Linien und Winkel verstattet, und so verschiedene Untersuchungen veranlaßt (Ebendas. S. 19 u. f.) wobey zu merken, daß die dort vorkommenden Zeichen keine combinatorischen, sondern blos willkührlich gewählte, sind.

62. Bey den Involutionen wird gewöhnlich ein Theil der Complexionen (die Ordnung 1 oder 2, S. 162) durch bloßes Vorschreiben des ersten Elements, erhalten. Man sieht hier ein Schreiben der Elemente in die Tiefe (Arch. der Math. H. I. S. 15) oder in verticalen Colonnen; wovon die Zahlenreihe gleichfalls ein sehr einfaches

etc	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	1
u.	0	0	0	1	0
	0	0	0	1	1
	0	0	1	0	0
	0	0	1	0	1
	0	0	1	1	0
	0	0	1	1	1
s.	0	1	0	0	0
	0	1	0	0	1
	0	1	0	1	0
	0	1	0	1	1
	0	1	1	0	0
	0	1	1	0	1
	0	1	1	1	0
	0	1	1	1	1
	1	=	=	=	=
w.	=	=	=	=	=
	1	1	1	1	1

u. s. w.

und belehrendes Beyspiel aufstellt. Ich will hier nur den Anfang des dyadischen Zahlensystems aus den beiden Grundzeichen 0, 1 beyfügen, wo die überschriebenen Potenzen der 2 anzeigen, wie vielmal jedes der beiden Elemente in jeder Verticalreihe, abwechselnd unter einander zu schreiben sey. Die hier eingezeichneten Parallelogramme (statt der sonstigen Winkel) zeigen jedesmal den Perioden der zusammengehörigen Ziffern in den Verticalreihen, der ohne Aufhören in die Tiefe hinab wiederholt werden muß. Bey Systemen von 3, 4, 5 oder mehreren Grundzeichen, würden die Wiederholungen der einzelnen Grundzeichen in den verticalen Reihen eben so durch die Potenzen der Zahlen 3, 4, 5 u. s. w. nachgewiesen werden. Bey dem dekadischen System kämen hier die Potenzen 10^0, 10^1, 10^2, 10^3 u. s. w. vor.

63. Die unmittelbarste Anwendung zeigt die Variationsaufgabe (18), wo man die Vorschrift für die dortige Darstellung (β), nach (62) für ein triadisches System aus a, b, c hätte geben, und so, nicht blos wie dort die a, sondern auch die übrigen Elemente b, c nach senkrechter Fortschreitung in die Tiefe hätte schreiben können. Eine zweyte, aber nicht so unmittelbare, Anwen-

dung zeigt (27, β); denn hier könnte man die Wiederholungen der a, b, c in den einzelnen verticalen Colonnen, nicht durch Potenzen der 3, sondern müßte selbige durch Zahlen aus der Tafel der figürlichen nachweisen; wie Herr Prof. Rothe in einem andern Falle, durch Zahlen einer andern Tafel gethan hat (Arch. der Math. H. II. S. 171-174). Eine interessante Anwendung solcher Fortschreitung gegebener Elemente in die Tiefe, geben die cyklischen Perioden. Meine Abhandlung davon im Magazine für reine und angewandte Mathematik (1786. St. III. S. 281 — 324).

(F) Allgemeine Glieder für Classen und Ordnungen; erste und einfachste Relationen in combinatorischen Zeichen.

64. Ich habe den Vortrag der Vorschriften über die beygebrachten combinatorischen Operationen durch dergleichen Glieder und Formeln nicht unterbrechen wollen. Sie sind aber wichtig und müssen daher nachgeholet werden.

65. Allgemeine nte Classe der Combinationen überhaupt, mit Wiederholungen (27)

$$a^n + a^{n-1}\,{}'A + a^{n-2}\,{}'B + a^{n-3}\,{}'C \ldots + a^0\,{}'\mathcal{N} = {}'\mathcal{N}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ b & c & d & e & \ldots \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ a & b & c & d & \ldots \end{pmatrix}$$

Da hier die Wiederholungen von a nach der Ordnung vorgeschrieben werden, so beziehen sich die Combinationsclassen 'A, 'B, 'C . . . hier eben so auf b, c, d . . . wie (in 27) auf a, b, c . . . und können auch die Werthe derselben unmittelbar (aus 27) abgeleitet werden, wenn man für die dortigen a, b, c . . . hier b, c, d . . . setzt.

Obige Formel giebt der Dinge a, b, c, d . . .

für $n = 1$, Unionen $a^1 + a^0\,'A \qquad = 'A$

" $n = 2$, Binionen $a^2 + a^1\,'A + a^0\,'B \qquad = 'B$

" $n = 3$, Ternionen $a^3 + a^2\,'A + a^1\,'B + a^0\,'C = 'C$

etc $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ b & c & d & e & \ldots \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots \\ a & b & c & \ldots \end{pmatrix}$

Man darf also nur der Dinge b, c, d . . . Combinationsclassen nach der Ordnung suchen (27, α) und ihnen die zugehörigen Wiederholungen von a vorschreiben.

Diese Formel für die allgemeine nte Classe der Combinationen überhaupt, habe ich bereits (*Infin. Dign.* p. 159 und *Nov. Syst. Perm.* p. XX, 11) gegeben. Aber die hier gebrauchten combinatorischen Zeichen $'A$, $'B$, $'C$ . . . sind deutlicher und verständlicher als die dortigen willkührlichen Zeichen $\overset{1}{B}, \overset{2}{B}, \overset{3}{B}$ . . .

(G) Allgemeine Darstellung der Combinationen zur unbestimmten Summe n, mit Wiederholungen.

66. I. Für den Zeiger $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ b & c & d & e & \ldots \end{pmatrix}$ giebt die Auflösung (43) die Buchstabeninvolution für jede verlangte Summe,

$^{n}\mathfrak{J}$ und daraus für $^{7}\mathfrak{J}$

&c	b	b	b	b	b	b	b
	b	b	b	b	b	c	
	b	b	b	b	d		
	b	b	b	c	c		
	b	b	b	e			
	b	b	c	d			
	b	b	f				
&c	b	c	c	c			
	b	c	e				
	b	d	d				
	b	g					
	c	c	d				
	c	f					
	d	e					
	h						
&c	&c						

b^6	b
b^5	c
b^4	d
b^3	cc
	e
b^2	cd
	f
b^1	ccc
	ce
	dd
	g
b^0	ccd
	cf
	de
	h

Eben das giebt die zweyte Darstellung (in 41) wenn man darinn b, c, d ... statt a, b, c ... setzt.

II. Die erste Darstellung in I zeigt nur den Anfang für das unbestimmte $^{n}\mathfrak{J}$. Dieser bleibt, wegen der involutorischen Fortschreitung, bey jedem höhern Werthe für n derselbe; auch fällt der Fortgang nach demselben Gesetze (43) klar in die Augen, und hat nicht die geringste Schwierigkeit.

III. Die Complexionen zwischen jedem Paare horizontaler Linien haben immer eine gleiche Anzahl von b vorgeschrieben, die niederwärts successive um Eins abnimmt. Drückt man diese Mengen durch Wiederholungsexponenten (53) aus, so rechtfertigt das die Darstellung von $^{7}\mathfrak{J}$ in I, wo die Wiederholungen von

b^6 bis auf b^0 herunter fallen. Auch hier deutet b^0 an, daß b in den übrigen Verbindungen nicht weiter vorkomme.

IV. Die Complexionen neben den Wiederholungen von b, die hier in Winkeln stehen, haben (die erste ausgenommen) weiter kein b, und beziehen sich auf den Zeiger $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ c & d & e & f & \dots \end{pmatrix}$, nach welchem die Complexionen in einem und demselben Winkel auch einerley Summe geben, die nach der Reihe der natürlichen Zahlen fortgehend, nach ${}^2\mathfrak{J}$, ${}^3\mathfrak{J}$, ${}^4\mathfrak{J}$ u. s. w. steigt.

V. Das führt auf die Gleichung:

$$ {}^n\mathfrak{J} = b^{n-1} b + b^{n-2}\, {}^2\mathfrak{J} + b^{n-3}\, {}^3\mathfrak{J} + b^{n-4}\, {}^4\mathfrak{J} \dots + b^0\, {}^n\mathfrak{J} $$

$$ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ b & c & d & e & \dots \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\ c & d & e & f & g & \dots \end{pmatrix} $$

Der Zeiger linker Hand gehört zu ${}^n\mathfrak{J}$, linker Hand des Gleichheitszeichens; der Zeiger rechter Hand zu den übrigen Involutionen. Die Entwickelung ihrer Glieder giebt nachstehende lexikographische Involution:

${}^{n}\mathfrak{J}$ $\left(\begin{smallmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ b & c & d & e & \dots\end{smallmatrix}\right)$ $=$	Combinationen zu unbestimmten Summen n, in directer lexikographischer Ordnung.
$b^{n-1} \; b =$	$b^{n-1} b$
$+ b^{n-2} \; {}^{2}\mathfrak{J} =$	$b^{n-2} c$
$+ b^{n-3} \; {}^{3}\mathfrak{J} =$	$b^{n-3} d$
$+ b^{n-4} \; {}^{4}\mathfrak{J} =$	$b^{n-4} [c^2, e]$
$+ b^{n-5} \; {}^{5}\mathfrak{J} =$	$b^{n-5} [cd, f]$
$+ b^{n-6} \; {}^{6}\mathfrak{J} =$	$b^{n-6} [c^3, ce, d^2, g]$
$+ b^{n-7} \; {}^{7}\mathfrak{J} =$	$b^{n-7} [c^2d, cf, de, h]$
$+ b^{n-8} \; {}^{8}\mathfrak{J} =$	$b^{n-8} [c^4, c^2e, cd^2, cg, df, e^2, i]$
$+ b^{n-9} \; {}^{9}\mathfrak{J} =$	$b^{n-9} [c^3d, c^2f, cde, ch, d^3, dg, ef, k]$
$+ b^{n-10} \; {}^{10}\mathfrak{J} =$	$b^{n-10} [c^5, c^3e, c^2d^2, c^2g, cdf, ce^2, ci, d^2e, dh, eg, f^2, l]$
$+ b^{n-11} \; {}^{11}\mathfrak{J} =$	$b^{n-11} [c^4d, c^3f, c^2de, c^2h, cd^3, cdg, cef, ck, d^2f, de^2, di, eh, fg, m]$
&c &c	
$\left(\begin{smallmatrix}2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ c & d & e & f & \dots\end{smallmatrix}\right)$	u. s. w. f.

Das ist das allgemeine Schema, davon die Anfänge in meinem oben (S. 163) erwähnten Programm und im Archiv der Math. (H. IV. S. 390, 393, 395) vorkommen. Die Complexionen in den Klammern (deren Summen immer mit der von n an b abgezogenen Zahl übereinkommen) sind hier, zu Ersparung des Raums, neben einander, nicht, wie dort (und hier in 66, I) unter einander geschrieben.

67. Diese Darstellung gehört zu den Involutionen der vollkommensten Art, und gewinnt durch den allgemeinen Ausdruck, beides an Kürze und Bequemlichkeit zugleich.

Eine niedrigere Involution zu bestimmten Summen, z. B. die für ${}^{7}\mathfrak{J}$ (in 66, I) aus ihr abzusondern, darf man nur $n = 7$ setzen, und einen Horizontalstrich unter $b^{n-7}\ {}^{7}\mathfrak{J}$ d. i. $b^{0}\ {}^{7}\mathfrak{J}$ und dessen (rechter Hand des Gleichheitszeichens befindlichen) Werth ziehen: so giebt das, was über diesen Strich stehet, zusammen die geforderte Involution für ${}^{7}\mathfrak{J}$, auf den in (66, I) befindlichen Zeiger bezogen.

Jede nächsthöhere Involution entsteht durch Anfügung eines neuen Gliedes zu den schon gegebenen, folgendergestalt: Es seyen $b^{n-m+2}\ {}^{m-2}\mathfrak{J}$ und $b^{n-m+1}\ {}^{m-1}\mathfrak{J}$ das vorletzte und letzte Glied der gegebenen Involution, so findet man daraus das neuanzufügende $b^{n-m}\ {}^{m}\mathfrak{J}$, wenn man 1) allen Complexionen für ${}^{m-2}\mathfrak{J}$ (die im vorletzten Gliede in der Klammer stehen) den Buchstaben c vorsetzt 2) in denjenigen Complexionen für ${}^{m-1}\mathfrak{J}$ (die im letzten Gliede in der Klammer stehen) welche zwey ungleiche Anfangsbuchstaben haben, den ersten Buchstaben mit dem nächstfolgenden des Zeigers vertauscht 3) die Complexionen, wie man sie (nach 1 und 2) gefunden hat, in ihrer Ordnung, neben b^{n-m} in die Klammer setzt. So sieht man, wie man z. B. für $m = 11$, das Glied $b^{n-11}\ {}^{11}\mathfrak{J}$ aus den beiden vorhergehenden $b^{n-9}\ {}^{9}\mathfrak{J}$ und $b^{n-10}\ {}^{10}\mathfrak{J}$ hat finden können. Auf diesem so leichten Wege ist obige Darstellung, aus den Anfangsgliedern $b^{n-1}b$, $b^{n-2}c$, $b^{n-3}d$ construirt worden; und daraus erhellet, daß man die Wiederholungsexponenten (53) hier eben so leicht bey c, d, e, f . . . als bey b anbringen kann, zu nicht geringer Verkürzung im Vortrage, und ohne dadurch die Vortheile der Involution aufzuheben oder zu vernichten.

68. Setzt man die (S. 202) in Klammern eingeschlossenen Complexionen so neben die b^{n-1}, b^{n-2}, b^{n-3}, u. s. w. daß zuerst die einbuchstabigen, dann die zwey- dann drey- vier- und mehrbuchstabigen Complexionen, in verticalen Reihen, wie in nachstehender figürlichen Anordnung, neben einander folgen, so wird dadurch jene lexikographische in eine Classendarstellung augenblicklich umgewandelt (60).

Combinationen zu unbestimmten Summen, nach gut geordneten Complexionen und Classen.

0	1	2	3	4	5
b^{n-1}	b				
b^{n-2}	c				
b^{n-3}	d				
b^{n-4}	e	c^2			
b^{n-5}	f	cd			
b^{n-6}	g	ce d^2	c^3		
b^{n-7}	h	cf de	c^2d		
b^{n-8}	i	cg df e^2	c^2e cd^2	c^4	
b^{n-9}	k	ch dg ef	c^2f cde d^3	c^3d	
b^{n-10}	l	ci dh eg f^2	c^2g cdf ce^2 d^2e	c^3e c^2d^2	c^5
b^{n-11}	m	ck di eh fg	c^2h cdg cef d^2f de^2	c^3f c^2de cd^3	c^4d

, , , , , , , , , ,
0 1 2 3 4 5 . . . .

69. Die Darstellung (68) bricht hier, wie die, von der sie ist abgeleitet worden, mit den zu b^{n-11} gehörigen Complexionen ab. Die Vergleichung derselben mit der Involution (66, I. S. 200) zeigt folgendes:

1) Die Wiederholungen von b linker Hand des Doppelstrichs in (68) sind die b längst der Senkstriche der Winkel (S. 200)

2) Die Complexionen in den Fächern rechter Hand des Doppelstrichs (68) sind dieselben, die zwischen den horizontalen Schenkeln zweyer nächster Winkel (S. 200) liegen.

3) Die Wiederholungen der b (1) und die danebenstehenden Complexionen (2) gehören so zusammen, daß die erstern jeder einzelnen Complexion vorgesetzt (oder damit verbunden gedacht) werden müssen.

4) Die Zahlenwerthe der Buchstaben in der Darstellung (68) giebt der Zeiger

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \ldots \\ b & c & d & e & f & g \ldots \end{pmatrix}$$

Dieser bringt durchgängig die Glieder (in 3) auf einerley Summe n. Die Summe in den einzelnen Complexionen (2) ist nehmlich immer so groß, als die Zahl, die von n an b abgezogen wird.

5) Das Absondern niedrigerer Involutionen aus höhern geschieht hier durch Ziehung eines Horizontalstriches, auf eben die Art, wie in (S. 203). Eben so auch der Fortgang für höhere Involutionen durch Anfügung neuer Glieder an die gegebenen.

6) Die Vertical-Reihen oder Colonnen der Complexionen in den Fächern sind unten, nach der Ordnung,

mit 0, 1, 2, 3, 4... bezeichnet. Zählt man nun die Glieder oder Fächer dieser einzelnen Verticalcolonnen von oben herunter, $\urcorner 1$, $\urcorner 2$, $\urcorner 3$ ... $\urcorner m$, so kann man die Complexionen jedes bestimmten Fachs bestimmt nachweisen, und selbige bequem unter einander vergleichen.

70. Die Darstellung (68) kann auch von jener andern (66. S. 202) unabhängig, folgendergestalt gefunden werden:

I. Man schreibe die Wiederholungen b^{n-1}, b^{n-2}, b^{n-3}, b^{n-4}, ... in eine Verticalreihe unter einander, und gleich daneben die einzelnen Elemente b, c, d, e ... in die erste Verticalreihe (69, 6) rechter Hand des Doppelstrichs.

II. Die übrigen Colonnen und Fächer mit ihren Complexionen, z. B. Col. $n \urcorner m$, findet man, wenn man allen um zwey Fächer höher liegenden Complexionen in der nächstvorhergehenden Colonne [allen Complexionen in Col. $(n-1) \urcorner m$] den Buchstaben c vorsetzt; 2) in den Complexionen, die unmittelbar über dem Fache liegen, dessen Complexionen man sucht [in den Complexionen in Col. $n \urcorner (m-1)$] mit Uebergehung derer, die zwey gleiche Anfangsbuchstaben haben, den ersten Buchstaben mit dem nächstfolgenden des Zeigers vertauscht, und 3) die (nach 1 und 2) gefundenen Complexionen, in Col. $n \urcorner m$ nach ihrer Ordnung setzt.

Für $m = 1$ wird $\urcorner (m-1) = 0$. Es giebt nehmlich nirgends ein Fach über den ersten, also auch für Col. $n \urcorner 0$ nichts umzutauschen.

71. Für jeden bestimmten Werth von n in (68) z. B. für $n = 10$, sind b^{n-10} mit den zugehörigen, rechter Hand daneben stehenden Complexionen die letzten, mit denen die Darstellung abbricht, so, daß b^{n-11} mit allem was daneben und darunter steht, für den Werth von $n = 10$, nicht

weiter in Betrachtung kommt. Was über den Horizontalstrich unter b^{n-10} (d. i. hier b^0) neben den Wiederholungen von b liegt, enthält zusammen die Combinationsclassen

$$ {}^{10}A,\ {}^{10}B,\ {}^{10}C,\ {}^{10}D,\ {}^{10}E,\ {}^{10}F,\ {}^{10}G,\ {}^{10}H,\ {}^{10}I,\ {}^{10}K $$

$$ \left(\begin{array}{cccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \\ c & d & e & f & g & \ldots \end{array} \right) $$

Der Zeiger für die Classen fängt hier von c oder 2 an, weil die Wiederholungen von b schon ein-für allemal in (68) abgesondert sind. Die Complexionen der einzelnen Classen ${}^{10}A$, ${}^{10}B$... liegen hier in den Diagonalfächern niederwärts rechter Hand, der ersten ${}^{10}A$ durch l; der zweyten ${}^{10}B$ durch k; der dritten ${}^{10}C$ durch i; der vierten ${}^{10}D$ durch h; u. s. w. aber nur bis an den Horizontalstrich unter b^{n-10}, weil unter diesem Strich nichts weiter (für n = 10) vorkommt.

72. Exempel. Die Complexionen für

$$ {}^{10}E \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ b & c & d & e & f & g \end{array} \right) $$

aus (68) anzugeben.

Für n = 10 findet man nach (71) aus (68)

$$ {}^{10}E = b^4 \,\underline{|g} + b^3 \begin{array}{|l} cf \\ \underline{de} \end{array} + b^2 \begin{array}{|l} c^2e \\ \underline{cd^2} \end{array} + b^1 \,\underline{|c^3d} + b^0 \,\underline{|c^5} $$

Die Complexionen sind hier (nach 54) neben einander geordnet. Eine von (68) unabhängige involutorische Darstellung derselben unter einander gäbe (52), wenn man mit ${}^{10}E$ eben so verführe, wie dort mit ${}^{10}D$, und für die dortigen a, b, c,.. hier b, c, d... setzte. Diese Anordnung wäre einerley mit der, wenn man die hier gefundenen Complexionen ganz ausgeschrieben (ohne Wiederholungsexponenten) unter einander setzte.

73. Zöge man (wie in 52, 53) von jeder Zahl des Zeigers (69, 4) Eins ab, d. i. nähme man anstatt des

Zeigers $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \dots \\ b & c & d & \dots\end{pmatrix}$ für (68) nun $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \dots \\ c & d & e & \dots\end{pmatrix}$ so würde das einen Einfluß auf die Summen der einzelnen Complexionen in den Fächern der einzelnen Verticalreihen haben. Sie würden sämtlich niedrigere Summen darstellen als jene; die Complexionen in der **ersten** Verticalcolonne um 1; die in der **zweyten** um 2; die in der **dritten** um 3; u. s. w.

74. Diesen Unterschied anschaulich darzustellen, darf man nur, statt der einzelnen Complexionen, das zugehörige Classenzeichen in die Fächer setzen. Das giebt

(α) für 68

b^{n-1}	b				
b^{n-2}	2A				
b^{n-3}	3A				
b^{n-4}	4A	4B			
b^{n-5}	5A	5B			
b^{n-6}	6A	6B	6C		
b^{n-7}	7A	7B	7C		
b^{n-8}	8A	8B	8C	8D	
b^{n-9}	9A	9B	9C	9D	
b^{n-10}	10A	10B	10C	10D	10E
b^{n-11}	11A	11B	11C	11D	11E
u.	s.	w.	f.		

$\begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \dots \\ c & d & e & f & g & h & i & k & l & m & \dots\end{pmatrix}$

(β) nach 73

b^{n-1}	b				
b^{n-2}	1A				
b^{n-3}	2A				
b^{n-4}	3A	2B			
b^{n-5}	4A	3B			
b^{n-6}	5A	4B	3C		
b^{n-7}	6A	5B	4C		
b^{n-8}	7A	6B	5C	4D	
b^{n-9}	8A	7B	6C	5D	
b^{n-10}	9A	8B	7C	6D	5E
b^{n-11}	10A	9B	8C	7D	6E
u.	s.	w.	f.		

$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \dots \\ c & d & e & f & g & h & i & k & l & m & \dots\end{pmatrix}$

Beide, dem äußern Ansehen nach ganz verschiedene, Schemata α und β, geben, jedes auf den unten beygefügten Zeiger bezogen, die Complexionen der Darstellung (68).

^{10}D

75. Um $\left(\begin{smallmatrix}1 & 2 & 3 \ldots \\ b & c & d \ldots\end{smallmatrix}\right)$ durch 74 α oder β zu bestimmen, darf man nur $n = 10$ setzen (71) so findet man

nach α; $^{10}D = b^3\,{}^7A + b^2\,{}^8B + b^1\,{}^9C + b^0\,{}^{10}D$

nach β; $^{10}D = b^3\,{}^6A + b^2\,{}^6B + b^1\,{}^6C + b^0\,{}^6D$

wo blos der Zeiger in (74, α, β) den Unterschied macht. Die Classe ^{10}D wird nehmlich hier in Summen von Classen zerlegt, wie in (52, 53); nur daß hier b, c, d... statt der dortigen a, b, c... zu setzen.

76. Die Vortreflichkeit der involutorischen Darstellung (68) wird folgendes in der Kürze zeigen:

1) Die rein-combinatorische Entwickelung (70, I, II) und Anordnung (68) ist, bey ihrer Allgemeinheit, dennoch äußerst leicht, und verstattet, die Wiederholungsexponenten bey den Elementen der Complexionen unmittelbar anzubringen, ohne die Involution zu zerstören.

2) Die Wiederholungen von b, so wie die ein- zwey- drey- vier- . . . buchstabigen Complexionen aus c, d, e, f... sind in einzelne Verticalreihen, nach der Ordnung, classenweise (nach gleichnamigen Classen, aber zu verschiedenen Summen) gesondert, jene nach fallenden, diese nach steigenden Summenexponenten (74)

3) Die Complexionen in den einzelnen Horizontalreihen oder Fächern hinter dem Doppelstrich stellen einzelne Classen für sich, nach dem beygefügten Zeiger, dar. Auf die nebenstehenden b zugleich mit bezogen, sind es diejenigen Complexionen, die immer eine gleiche Anzahl vorgesetzter b enthalten.

4) Die zusammengehörigen Elemente der lexikographischen Ordnung aus b, c, d ... findet man in den

Horizontalreihen (66, IV); der Classendarstellung in den Diagonalreihen (71). Die hier getroffene figürliche Anordnung stellt nehmlich beider Zusammenhang anschaulich dar.

5) Das Absondern niedrigerer Involutionen (bestimmter und unbestimmter Summen) aus höhern, so wie der Fortgang für höhere Involutionen aus den gegebenen, geschieht mit größter Leichtigkeit (69, 5).

6) Die wenigen Complexionen in (68) vertreten, wenn man nach einander n = 1, 2, 3, 4 .... 11 setzt, vollkommen die Stelle der Tafel (*Infin. Dignit.* p. 166 und *Nov. Syst. Perm.* p. LVIII) und noch weiter; denn der Werth n = 11 giebt auch die sämtlichen Classen zur Summe 11, davon in jener Tafel nichts vorhanden ist. Die Buchstabencomplexionen der Tab. V (*Infin. Dign.* p. 167) aus (68) zu schreiben, darf man nur

statt b, c, d, e, f, g, h, i, k, l (in 68)
hier α, β, γ, δ, ε, ζ η, θ, ι, $\varkappa$ setzen.

7) Obschon hier nach der Vorschrift (70, I, II) folgende Complexionen und Fächer aus vorhergehenden abgeleitet werden, so kann man gleichwohl jede einzelne Vertical-Horizontal- und Diagonal-Reihen und Fächer ganz independent von andern, außer der Ordnung, schaffen. Das giebt insonderheit (74, β) klar und deutlich zu erkennen, weil man die Complexionen jeder Classe und Summe unmittelbar darstellen kann (49, 51, 52).

77. Das zusammen zeigt die Güte und Vortreflichkeit sowohl der combinatorischen Methode überhaupt, als der Darstellung (68) insbesondere. Simplicität und Allgemeinheit bey der Entwickelung, Kürze und Deutlichkeit bey der Anordnung, Mannichfaltigkeit und Leichtigkeit bey der Anwendung, sind hier aufs innigste mit ein-

ander verbanden. Das ist die (S. 54 Note c) versprochene endliche Vollendung. Was Herr Prof. Klügel in der vorigen Note von den Vorzügen der combinatorischen Involutionen überhaupt sagt, das gilt, in einem eminenten Grade, vornehmlich von dieser letzten, noch mehr als von jener andern in (65) nach welcher die in (68) im Ganzen geformt, und, mutatis mutandis, eingerichtet ist. Die allgemeine Formel, deren nähere Entwickelung die Darstellung (68) giebt, wird in Folgendem vorkommen.

78. So viel schien mir nöthig, von den combinatorischen Operationen, vorzüglich den Involutionen, im Zusammenhange hier beyzubringen. Die Aufführung bestimmter Vorschriften für die Entwickelung und Darstellung dieser Operationen ist unumgänglich nothwendig. Sie betrifft die unmittelbare Anwendung der allerersten Gründe der Sache, und darf der Willkühr des Lesers nicht überlassen bleiben. Auch würde dieser nicht (selbst nicht einmal der geübte Analyst, sogleich und auf der Stelle) immer die kürzesten, und für gewisse Absichten zunächst passenden Regeln und Vorschriften auffinden. Auf solche muß man sich also beziehen können, und darum müssen sie auch irgendwo deutlich verfaßt und beschrieben vorhanden seyn. Die Sache (deren Nothwendigkeit gleichwohl einmal ist bezweifelt worden), so angesehen, spricht für sich selbst, und Herr Prof. Klügel ist derselben Meynung (S. 89). Hinterher kann Jedem freystehen, und es wird auch keine Schwierigkeit haben, die Vorschriften nach Gefallen für sich abzuändern, nach Umständen zu erweitern und durch neue zu vermehren.

79. Ich hoffe, die Leichtigkeit der hier angewiesenen Verfahren wird dem Leser von selbst einleuchten. Sollte aber diese combinatorische Theorie, so einfach sie an sich

ist, dem Anfänger gleichwohl verwickelt scheinen, weil man sie, bey der Ausdehnung, die sie in der Anwendung hat, nicht mit zwey Worten abthun kann: so kann ich einem solchen nichts Passenderes und Wahreres entgegensetzen, als die Antwort, die Herr Hofrath Lichtenberg, in einem ähnlichen Falle, bey einer gleichfalls sehr einfachen, nur dem Scheine nach verwickelten, physischen Theorie gegeben hat — „Man muß viel Worte machen, nicht, weil die „Theorie selbst verwickelt ist, sondern weil der Anwendun„gen, die daraus erklärt werden können, so viele sind. „Man sagt nichts Anders, sondern man wendet es nur „auf etwas Anders an" (Erxleb. Anfangsgr. der Naturl. §. 549. l. S. 525). Alles fließt auch hier (wie dort) aus einer einzigen sehr einfachen Voraussetzung: „Die „Veränderungen bey rein-combinatorischen Verrichtungen „lassen sich auf blosses Ansetzen oder Beyfügen, Wegneh„men oder Absondern, Aus- oder Umtauschen der vorgege„benen Elemente, zurückführen (S. 161, 7)."

Vergleichung der Zeichen für combinatorische Operationen; einfachste Relationen derselben in diesen Zeichen.

80. Die Zeichen selbst, so viel deren hier aufzuführen nöthig schien, sind schon im Vorhergehenden erklärt. Hier kommt es nur auf ihre Vergleichung gegen einander an, und wie sich combinatorische (und in der Folge auch analytische) Sätze bequem durch sie ausdrücken lassen.

(α) Variationen überhaupt, mit Wiederholungen

Var (a b c d . . .) *simpl*

81. $'J = 'A + 'B + 'C + 'D + 'E \ldots + '\mathcal{N}$

(a b c d e . . .)

Die einzelnen Classen $'A$, $'B$, $'C$ . . . beziehen sich auf (18, α), die Involution $'J$ auf (18, β) in so fern diese Darstellung Summen von Classen involutorisch enthält. Die Elemente a, b, c, d . . . werden jederzeit, als der zu bearbeitende Stoff, den Zeichen $'J$ und $'A$, $'B$ . . . unten beygefügt.

82. Die Variationen gegebener Elemente enthalten alle Combinationen derselben, mit allen Permutationen. Für jede einzelne Complexion einer Variationsclasse, müssen in derselben Classe auch alle ihre Versetzungen mit vorkommen. Man kann also wegen der Versetzungen gegebener Elemente auf die Variationsclassen verweisen, in denen sie enthalten sind, und die besondern Complexionen, welche diese Verstzungen zusammen ausmachen, durch den beygefügten Zeiger nachweisen. So ist z. B.

$$Perm\,(a^4b^3) = Perm \begin{pmatrix} 1111222 \\ aaaabbb \end{pmatrix} = \underset{(aaaabbb)}{{}^{10}G}\,.$$

$$Perm\,(a^3b^2c^4) = Perm \begin{pmatrix} 111223333 \\ aaabbcccc \end{pmatrix} = \underset{(aaabbcccc)}{{}^{19}I}$$

Die Auflösung giebt (12) wie bey dem dortigen Exempel (13). Sie ist nehmlich eine bequeme Auflösung für den Fall, Permutationen als (beschränkte) Variationsclassen zu betrachten, in welchen bestimmte Elemente, aber jedes nur nach einer bestimmten Anzahl, vorkommen. Das kann man sehr bequem (wie hier) durch wirkliche Wiederholung der Elemente ausdrücken, welche zusammen die erste Permutationscomplexion (als die Repräsentantinn aller übrigen) darstellen. Ferner

$$Perm\,(a\,b\,c\,d) = Perm \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ a\,b\,c\,d \end{pmatrix} = \underset{(a\,b\,c\,d)}{{}^{10}D}$$

Die Auflösung giebt (12) und steht vollendet in (14). Auch hier hat man bequeme Auflösungen für Variationen

aus bestimmten Elementen zu bestimmten Summen, aber ohne Wiederholungen, von welchen im Vorhergehenden nichts ist beygebracht worden.

Die Complexionen von $\overset{10}{D}(1234)$ sind mit unter denen von $\overset{10}{D}(1234567)$ enthalten, die (*Nov. Syst. Perm. p.* 177) stehen; daß sich also jene (ohne Wiederholungen) aus diesen (mit Wiederholungen) auslesen ließen. Die angeführten Auflösungen zeigen, wie man sie leichter geradezu finden kann. *)

(β) Combinationen überhaupt, mit Wiederholungen.

Comb (a b c d...) *simpl*

$$83.\ 'J = 'A + 'B + 'C + 'D + 'E \ldots + '\mathcal{N}$$
$$(a\ b\ c\ d\ e \ldots)$$

Die einzelnen Classen 'A, 'B, 'C... stehen in (27, α) die Involution 'J in (27, β). Auch hier sind den Zeichen 'J und 'A, 'B... die Elemente (a, b, c, d...) unten beygefügt (80).

*) Man könnte auch die Combinationen (wie hier die Permutationen) als beschränkte Variationen ansehen, deren Complexionen sämtlich gut geordnet wären, und in dieser Rücksicht nur eine einzige combinatorische Operation, die Variation, annehmen. So wahr das an sich ist, und so sehr das Ganze dadurch an Simplicität gewinnt, so ist es dennoch besser, bey dem Vortrage der ersten Gründe der Wissenschaft von dieser Allgemeinheit nicht auszugehen, und die drey combinatorischen Operationen als besondere ihrer Art anzusehen; um so mehr, da diese Unterschiede beym Gebrauche häufig vorkommen. Beym Vortrage der Regeln hingegen, kann man auf diese Dependenz Rücksicht nehmen; daher ich auch im Vorhergehenden die Verfahren für Variationen, denen für Combinationen vorgesetzt, der letztern Abhängigkeit von den ersteren gezeigt, auch hier, wegen der Permutationen, auf Variationen verwiesen habe.

Einzelne Classen durch Summen von Classen (65).

$$84.\quad {}'\mathcal{N} = a^n + a^{n-1}\,{}'A + a^{n-2}\,{}'B + a^{n-3}\,{}'C \ldots + a^0\,{}'\mathcal{N}$$
$$(a\ b\ c \ldots) \qquad\qquad (b\ c\ d\ e \ldots)$$

Die Classen 'A, 'B, 'C... giebt (27, a) nur daß man hier b, c, d... statt der dortigen a, b, c... brauchen, oder die erstern für die letztern setzen muß. Die Beschaffenheit, die Zahl, der Ort der unten beygefügten Elemente zeigt nehmlich jederzeit, was für Elemente für die Entwickelung und Darstellung der darüberstehenden Classen zu gebrauchen.

Folgende Classen aus unmittelbar vorhergehenden (27, 28).

$$85.\quad {}'\mathcal{N} = a\,{}'\overset{-1}{\mathcal{N}} + b\,{}'\overset{-1}{\mathcal{N}} + c\,{}'\overset{-1}{\mathcal{N}} \ldots + \psi\,{}'\overset{-1}{\mathcal{N}} + \omega\,{}'\overset{-1}{\mathcal{N}}$$
$$(ab..\psi\omega)\ (ab..\omega)\ (bc..\omega)\ (cd..\omega) \qquad (\psi\omega) \quad , \quad \omega$$

Diese Formel enthält die Auflösung (28), symbolisch dargestellt. Bey dieser werden nehmlich die Ordnungen jeder folgenden Classe $'\mathcal{N}$, aus den Ordnungen der unmittelbar vorhergehenden $'\overset{-1}{\mathcal{N}}$, durch successives Vorschreiben der Buchstaben a, b, c... gefunden.

Complexionen mit einerley Endbuchstaben.

$$86.\quad (1 + {}'A + {}'B + {}'C + {}'D + {}'E \ldots + {}'\overset{-1}{\mathcal{N}})\,q$$
$$(a\ b\ c\ d\ e \ldots q)$$

Nämlich, für den Endbuchstaben q, durch alle Classen, von der ersten bis mit der nten; und so auch für andere Endbuchstaben und Classen.

Complexionen der Endbuchstaben a, b, c, d ...
nach der Reihe.

$$87.\ \underset{(abc\ldots)}{'\mathfrak{N}} = a^n + \underset{(ab)}{\overset{-1}{'\mathfrak{N}}} b + \underset{(abc)}{\overset{-1}{'\mathfrak{N}}} c + \underset{(abcd)}{\overset{-1}{'\mathfrak{N}}} d + \&c$$

Für die Complexionen jeder einzelnen Classe $'\mathcal{N}$, aus den Complexionen der unmittelbar vorhergehenden Classe $\overset{-1}{'\mathcal{N}}$, mit Beziehung auf die untergesetzten Elemente (ab) oder (abc) u. s. w. (84)

In der Anwendung kommen (86, 87) weit seltener vor, als (84, 85). Hier sollen sie blos zeigen, wie außerordentlich leicht solche Forderungen combinatorisch sich abthun lassen. Die Formeln (85, 87) geben Beyspiele von Veränderung der Elemente, in Absicht auf Menge und Beschaffenheit, wo man zugleich mit auf den Ort sehen muß (84) wo sie stehen. Verschiedene Elemente (auch Zeiger) kommen nicht selten bey einer und derselben Formel vor, und werden mit großem Nutzen gebraucht. Die oben beygefügten Buchstabenelemente beziehen sich auch hier zunächst, wie die Zahlenelemente bey der Aufgabe (S. 193), auf die durch sie zu bezeichnenden Ordnungen.

(γ) Variationen zu bestimmten Summen, mit Wiederholungen.

$$Var \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\ a & b & c & d & e & \ldots \end{pmatrix} num.\ n\ ^{*)}$$

*) Bey den Operationen zu bestimmten Summen, wenn man sie auch schon von Zahlen unabhängig (33—36, 41—

Classen-Complexionen (33, 34).

88. $^nJ = {}^nA + {}^nB + {}^nC + {}^nD + {}^nE \ldots + {}^nN$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\ a & b & c & d & e & \ldots \end{pmatrix}$$

Lexikographische Complexionen (33, 36).

89. $^n\mathfrak{J} = {}^n\mathfrak{A} + {}^n\mathfrak{B} + {}^n\mathfrak{C} + {}^n\mathfrak{D} + {}^n\mathfrak{E} \ldots + {}^nN$

(Der Zeiger, wie vorher)

Für mehrere Reihen p, q, r, s, t ... nach Classen (39)

90. $\overset{\ldots tsrpq}{^nJ} = {}^n\overset{p}{A} + {}^n\overset{qp}{B} + {}^n\overset{rqp}{C} + {}^n\overset{srqp}{D} + {}^n\overset{tsrqp}{E} + \&c$

(Der Zeiger, wie in 24)

Wegen der lexikographischen Anordnung für $\overset{\ldots tsrqp}{^n\mathfrak{J}}$, sehe man die Darstellungen in (40).

(δ) Combinationen zu bestimmten Summen, mit Wiederholungen.

$$Comb \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\ a & b & c & d & e & \ldots \end{pmatrix} num.\ n$$

44, 49—51) darstellen kann, muß man doch, Zahlen und Buchstaben, wie sie zusammengehören, im Zeiger angeben, weil die Summenexponenten der Classen von den Zahlenwerthen abhangen, und bey andern Zahlen anders werden (73, 74); und so muß man den Zeiger (wie hier in 88) von den einzelnen Elementen, Buchstaben (84, 85, 86, 87) oder Zahlen (57, S. 193) unterscheiden. Zuweilen setzt man den Zeiger, wo einzelne Elemente zureichten (11, 14, 18, 27); anzudeuten, die Regeln der Operationen erstrecken sich gleichleicht auf beiderley Elemente.

Classen-Complexionen (41, 42)

$$91.\ {}^{n}J = {}^{n}A + {}^{n}B + {}^{n}C + {}^{n}D + {}^{n}E \ldots + {}^{n}\mathcal{N}$$

$$\left(\begin{matrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \ldots \\ a\ b\ c\ d\ e \ldots \end{matrix}\right)$$

lexikographische Complexionen (41, 43, 44).

$$92.\ {}^{n}\mathfrak{J} = {}^{n}\mathfrak{A} \dagger {}^{n}\mathfrak{B} \dagger {}^{n}\mathfrak{C} \dagger {}^{n}\mathfrak{D} \dagger {}^{n}\mathfrak{E} \ldots \dagger {}^{n}N$$

(der Zeiger, wie vorher)

Wegen der beiderley (43, 44) aufgeführten lexikographischen Formen, kann man auch das Arch. der Math. (H. IV. S. 397 und 409, 414) nachsehen. Wegen der gebrauchten Zeichnung für lexikographische Ordnungen überhaupt (Ebendas. S. 396. Note) für Fälle, wo die Combinationsclassen noch mit Reihenexponenten zu versehen sind, hier (47).

Höhere Involutionen, aus nächstverhergehenden niedrigern. *)

$$93.\ {}^{n}\mathfrak{J} = 1\ {}^{n-1}\mathfrak{J} \qquad + \qquad {}^{n}\mathfrak{J}$$

$$\left(\begin{matrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \ldots \\ a\ b\ c\ d\ e \ldots \end{matrix}\right) \qquad \left(\begin{matrix} 2\ 3\ 4\ 5 \ldots \\ b\ c\ d\ e \ldots \end{matrix}\right)$$

*) Von einer andern Zusammensetzung höherer Involutionen aus niedrigern, wo der Zeiger mehrmals verändert wird (Arch. der Math. H. IV. S. 418, d). Statt des dortigen [J1] muß das hiesige $\mathfrak{J}$ gesetzt werden, welches damals bey dem Drucke nicht zur Hand war. Dieser Umstand hat veranlaßt, daß, der Analogie wegen (Ebend.) auch [J1] gesetzt werden mußte, wo das hiesige J allein hinreichend gewesen wäre. Eben so ist, in Herrn von Prassens Abhandlung (man sehe hier S. 86, m) aus Mangel der zugehörigen Typen, überall J und $\mathcal{J}$ statt $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{J}$ gesetzt worden. Ich erinnere das, theils um Anstoß zu vermeiden, theils aber auch, weil die Beybehaltung derselben Zeichen nirgends so unerläßlich nothwendig und wichtig ist, als bey der combinatorischen Analysis.

Wegen der beiden ersten Involutionen, sehe man (41, 43), wegen der dritten, deren Zeiger von b (d. i. hier 2) anfängt (57, S. 193). Hieher gehören die drey von Herrn Prof. Klügel (S. 61) aufgeführten Beyspiele.

Höhere Involutionen aus Summen der niedrigern (S. 201, V)

$$94.\quad {}^{n}\mathfrak{J} = a^{n-1}a + a^{n-2}\,{}^{2}\mathfrak{J} + a^{n-3}\,{}^{3}\mathfrak{J} + a^{n-4}\,{}^{4}\mathfrak{J} \ldots + a^{0}\,{}^{n}\mathfrak{J}$$

$$\left(\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4 & \ldots\\ a & b & c & d & \ldots\end{matrix}\right) \quad \left(\begin{matrix}2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots\\ b & c & d & e & f & \ldots\end{matrix}\right)$$

Lexikographische Darstellung der vorigen Formel.

95.

$a^{n-1}a$
$a^{n-2}b$
$a^{n-3}c$
$a^{n-4}[b^2, d]$
$a^{n-5}[bc, e]$
u. s. w. S. 202

Sie ordnet die Glieder so, daß die Complexionen aus b, c, d ... die gleichviel a vor sich haben, in eine horizontale Reihe fallen. Für den Zeiger $\left(\begin{matrix}1 & 2 & 3 & \ldots\\ a & b & c & \ldots\end{matrix}\right)$ gehen die Complexionen, neben den Wiederholungen von a, in steigender Summe 1, 2, 3, 4, 5 ... fort; mit den Wiederholungen von a verbunden, geben sie durchaus die Summe n. Die b, c, d ... der Darstellung (S. 202) sind hier mit a, b, c ... verwechselt. Für n = 5 wären hier schon alle Complexionen für ${}^{5}\mathfrak{J}$ vorhanden.

Einzelne Classen durch Summen von Classen (*Nov. Syst. p.* LV, 9).

$$96.\quad {}^{\nu+n}\mathfrak{N} = a^{n-1}\,{}^{\nu}A + a^{n-2}\,{}^{\nu}B + a^{n-3}\,{}^{\nu}C \ldots + a^{n-m}\,{}^{\nu}\mathfrak{M}$$

$$\left(\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4 & \ldots\\ a & b & c & d & \ldots\end{matrix}\right) \quad \left(\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4 & \ldots\\ b & c & d & e & \ldots\end{matrix}\right)$$

Diese Formel (mit Binomial- und Polynomial-Coefficienten versehen, wie sie für die Dignitäten des Polynomiums paßt) steht in der oben angezeigten Stelle meiner Schrift. Hier habe ich blos n und ν verwechselt; um n und $\mathcal{N}$ auf einerley Zahlenwerth zu setzen. Das allgemeine mte Glied ist hier $a^{n-m}\,{}^{\nu}\mathcal{M}$. Sobald n oder ν (oder beides zugleich) = m werden, bricht die Formel mit diesem Gliede ab.

Für $\begin{pmatrix} {}^{10}D \\ 1\;2\;3\ldots \\ a\;b\;c\ldots \end{pmatrix}$ wäre $\mathcal{N} = D$, also $n = 4$, und $\nu + 4 = 10$ folglich $\nu = 6$

also $\begin{pmatrix} {}^{10}D \\ 1\,2\,3\ldots \\ a\,b\,c\ldots \end{pmatrix} = a^3\,{}^6A + a^2\,{}^6B + a^1\,{}^6C + a^0\,{}^6D, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ b & c & d & e & \ldots \end{pmatrix}$

vollkommen so, wie S. 190.

Eben so fände man den Werth für ^{15}E, wie S. 191.

Involutorische Classen-Darstellung der vorigen Formel.

97.

$a^{n-1}a$	$a^{n-1}a$
$a^{n-2}b$	$a^{n-2}\,{}^1A$
$a^{n-3}c$	$a^{n-3}\,{}^2A$
$a^{n-4}[d, b^2]$	$a^{n-4}[{}^3A, {}^2B]$
$a^{n-5}[e, bc]$	$a^{n-5}[{}^4A, {}^3B]$
u. s. w. S. 204;	u. s. w. S. 208, β

Der Zeiger für die Classen $^1A, {}^2A \ldots {}^2B, {}^3B \ldots$ u. s. w. ist $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots \\ b & c & d & \ldots \end{pmatrix}$. Auch hier sind die b, c, d... (in 68 und 74, β) mit a, b, c... verwechselt worden. Die einzelnen Classen liegen in den Diagonalen niederwärts

(71) und so kommt hier die Bedeutung von n, mit der in (96) nicht überein.

(e) Verschiedene Relationen der Variationen und Combinationen, mit und ohne Summenexponenten.

Variat. ohne und mit Summenexponenten.	Combin. ohne und mit Summenexponenten.
98. $'A = {}^1A + {}^2A + {}^3A \ldots$	99. $'\mathrm{A} = {}^1\mathrm{A} + {}^2\mathrm{A} + {}^3\mathrm{A} \ldots$
$'B = {}^2B + {}^3B + {}^4B \ldots$	$'\mathrm{B} = {}^2\mathrm{B} + {}^3\mathrm{B} + {}^4\mathrm{B} \ldots$
$'C = {}^3C + {}^4C + {}^5C \ldots$	$'\mathrm{C} = {}^3\mathrm{C} + {}^4\mathrm{C} + {}^5\mathrm{C} \ldots$
$'D = {}^4D + {}^5D + {}^6D \ldots$	$'\mathrm{D} = {}^4\mathrm{D} + {}^5\mathrm{D} + {}^6\mathrm{D} \ldots$
. . . . . .	. . . . .

Die Summe in (98) giebt

$$100. \begin{bmatrix} 'A \\ +'B \\ +'C \\ +\text{etc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1A + {}^2A + {}^3A \ldots \\ + {}^2B + {}^3B + {}^4B \ldots \\ + {}^3C + {}^4C + {}^5C \ldots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1A \\ +({}^2A + {}^2B) \\ +({}^3A + {}^3B + {}^3C) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{bmatrix}$$

Die Summe in (99) giebt

$$101. \begin{bmatrix} '\mathrm{A} \\ +'\mathrm{B} \\ +'\mathrm{C} \\ +\text{etc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1\mathrm{A} + {}^2\mathrm{A} + {}^3\mathrm{A} \ldots \\ + {}^2\mathrm{B} + {}^3\mathrm{B} + {}^4\mathrm{B} \ldots \\ + {}^3\mathrm{C} + {}^4\mathrm{C} + {}^5\mathrm{C} \ldots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1\mathrm{A} \\ +({}^2\mathrm{A} + {}^2\mathrm{B}) \\ +({}^3\mathrm{A} + {}^3\mathrm{B} + {}^3\mathrm{C}) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{bmatrix}$$

Eben so ist, bey mehrern Reihen p, q, r, s ... (24, 25)

$$102. \; '\overset{p}{A} = {}^1\overset{p}{A} + {}^2\overset{p}{A} + {}^3\overset{p}{A} + {}^4\overset{p}{A} + \&c$$

$$'\overset{qp}{B} = {}^2\overset{qp}{B} + {}^3\overset{qp}{B} + {}^4\overset{qp}{B} + \&c$$

$$'\overset{rqp}{C} = {}^3\overset{rqp}{C} + {}^4\overset{rqp}{C} + \&c$$

$$\cdot \quad \cdot$$

Die Summe aus (102) giebt

$$103.\quad {}^{\prime}\overset{p}{A} + {}^{\prime}\overset{qp}{B} + {}^{\prime}\overset{rqp}{C} + \&c = {}^{1}\overset{p}{A} + ({}^{2}\overset{p}{A} + {}^{2}\overset{qp}{B}) + ({}^{3}\overset{p}{A} + {}^{3}\overset{qp}{B} + {}^{3}\overset{rqp}{C}) + \&c$$

Variationen an sich und Combinationen.

$$104.\quad \text{Für } {}^{\prime}A = a{}^{\prime}A,\quad {}^{\prime}B = b{}^{\prime}B,\quad {}^{\prime}C = c{}^{\prime}C \ldots \quad \text{ist } {}^{\prime}A + {}^{\prime}B + {}^{\prime}C + \&c = a{}^{\prime}A + b{}^{\prime}B + c{}^{\prime}C + \&c$$

Die Variationen sind nehmlich nichts anders als Combinationen, mit allen Versetzungen der Elemente in den einzelnen Complexionen. Wo also diese Versetzungen (wie bey den Factoren der Produkte) nichts verschiedenes geben, darf man sie nur überhaupt zählen, und ihre Zahl den zugehörigen Combinationscomplexionen, welche die übrigen repräsentiren, beyfügen. Das geschiehet durch die Versetzungszahlen a, b, c ... (*Nov. Syst. Perm.* p. IX, 24 und XL, 10) deren Werth für jede Complexion gegeben ist (Ebendas. p. XXIV, 23 und hier S. 65 und 102; 1, 2).

Combinationen mit und ohne Summenexponenten.

$$105.\quad \begin{aligned} a{}^{\prime}A &= a^{1}A + a^{2}A + a^{3}A + a^{4}A \ldots \\ b{}^{\prime}B &= b^{2}B + b^{3}B + b^{4}B \ldots \\ c{}^{\prime}C &= c^{3}C + c^{4}C \ldots \\ d{}^{\prime}D &= d^{4}D \ldots \end{aligned}$$

Die Summe aus (105) giebt

$$106.\quad a{}^{\prime}A + b{}^{\prime}B + c{}^{\prime}C + \&c = a^{1}A + (a^{2}A + b^{2}B) + (a^{3}A + b^{3}B + c^{3}C) + \&c$$

Für die Fälle, wo $'A = a'A$; $'B = b'B$; u. s. w. (104) ist auch

$$107.\ 'A + 'B + 'C + \&c = a^1A + (a^2A + b^2B) + (a^3A + b^3B + c^3C) + \&c$$

108. Diese Formeln und Vergleichungen, wenn man einmal die Bedeutung der dabey vorkommenden combinatorischen Zeichen gut inne hat, sind so leicht, daß man sie nur zu sehen braucht, um sie sogleich durchzusehen.

Da hier überall keine andern Complexionen, als solche vorkommen, bey denen Wiederholungen verstattet sind, so war es nicht nöthig, solches hier mit anzumerken. In andern Fällen darf man nur die Buchstaben a. r. (admissis repetitionibus) oder o. r. (omissis repetitionibus) beyfügen, und z. B. schreiben:

Var (a b c d . . .) simpl. *a. r.*

Comb (a b c d . . .) simpl. *o. r.*

II. Die unmittelbarste Anwendung der Combinationslehre zeigt sich bey dem allgemeinen Produkten- und Potenzenprobleme der Reihen.

109. Die Combinationslehre deutet überhaupt die in bestimmter Ordnung gegebenen Dinge oder Elemente durch die Folge der Zahlen 1, 2, 3, 4 . . . oder der Buchstaben a, b, c, d . . . an. Bey der Verbindung dieser Elemente zu einem zusammengesetzten Ganzen, abstrahirt sie von aller Bedeutung (2) und betrachtet z. B. die Complexionen ab und ba als bloße Nebeneinanderstellungen der beiden Dinge a, b, noch mit dem Unterschiede, daß in ab das Element a die erste und b die zweyte Stelle einnimmt, welches bey ba umgekehrt sich verhält.

110. Bey dem Gebrauche der Combinationslehre außerhalb ihren Gränzen hingegen, muß man wissen, was für Dinge die a, b, c, d... bezeichnen, muß die Beschaffenheit dieser Dinge und welche Beziehung sie auf einander haben, genauer kennen (3). In meiner Schrift (*Nov. Syst. Perm.* p. XXV, XXVI) habe ich mehrere Anwendungen der Combinationslehre auf verschiedene Künste und Wissenschaften in der Kürze und nur überhaupt angegeben. Hier genügt es, bey derjenigen Wissenschaft stehen zu bleiben, welche an der wohlthätigen Einwirkung der Combinationslehre den unmittelbarsten Antheil nimmt, den größten Vortheil davon zieht (3, 5) und gleichwohl bisher von dieser Seite fast ganz übersehen worden ist — der Analysis.

111. Läßt man die Buchstaben a, b, c... allgemein ausgedrückte Größen oder Zahlen bedeuten, so darf nur noch angegeben werden, wie man ihre Verbindungen ab, abc u. d. gl. zu nehmen habe. An sich nehmlich kann ab, in arithmetischer Bedeutung, eben sowohl $a+b$ als $a-b$ und $a.b$ und $a:b$ und a^b und $\sqrt[a]{b}$ u. s. w. ausdrücken. Schränkt man aber — so lange nichts anders erinnert wird — die Bedeutung der (für sich oder in Beziehung auf Zahlen im Zeiger) gegebenen Elemente a b c d... auf $a+b+c+d+$ &c. und ihre Verbindungen ab, abc, a^2b... auf a. b, a. b. c, a. a. b (d. i. a^2b)... ein, so entstehen dadurch Producte aus einzelnen Factoren, die Wiederholungsexponenten (53) verwandeln sich in Potenzexponenten, und die im Vorhergehenden aufgeführten blos combinatorischen Formeln und Relationen zusammengehöriger Dinge oder Elemente überhaupt, erhalten dadurch sogleich bestimmte arithmetische oder algebraische Bedeutung.

112. Für die Anwendung dieser und anderer combinatorischen Formeln und Relationen auf die Analysis, ist also nur noch übrig nachzuweisen, bey was für analytischen Problemen sie vorkommen; überhaupt — wo und wie sie zu gebrauchen und im Calcul einzuführen sind. Das nenne ich, statt der algebraischen und transcendentischen (oft sehr verwickelten und schweren) Operationen, die gleichgültigen (einfachern und leichtern) combinatorischen setzen und benutzen. Das hierbey von mir eingeführte Verfahren ist, sowohl in Absicht auf Entwickelung als Darstellung, von dem gewöhnlichen wesentlich unterschieden; daher auch die Einführung jener Operationen statt dieser, in der Erklärung namentlich vorkommt, die ich ohnlängst von der combinatorischen Analysis gegeben habe (Arch. der Math. H. IV. S. 423).

113. Meine Combinationszeichen sind übrigens so geformt, ihre Zusammensetzung so eingerichtet, daß sie das, wofür sie gebraucht werden, nicht nur aufs deutlichste anzeigen, sondern auch alle andere nicht-combinatorische Veränderungen sich bey ihnen anbringen und durch sie nachweisen lassen. Sie können daher auch andern, von ihnen ganz verschiedenen, Methoden leichter angepaßt werden, als man dem ersten Ansehen nach vermuthen sollte. Daß man dabey etwas Neues lernen müsse, was man bisher noch nicht gewußt und in Ausübung gebracht hat, ist freylich eine nothwendige Bedingung, die man sich aber gern wird gefallen lassen, wenn man einestheils sieht, wie leicht dieser combinatorische Calcul ist, anderntheils, welche Schwierigkeiten anderer Methoden hierbey umgangen werden. Nach einer von Herrn Hofrath Kästner, bey ganz anderer Gelegenheit *)

*) Bey einigen von Herrn Professor Buek bekannt gemachten neuen Auflösungen einiger schweren trigonometrischen Aufgaben (Kästn. Eb. Trigon. Satz 15).

gethanen Aeußerung zu urtheilen, gehört meine Combinationsmethode offenbar zu den leichtesten; wenn man mit diesem vortreflichen Mathematiker, diejenigen Verfahren überhaupt leicht nennt, wodurch man das Gesuchte leicht findet, sollte man auch zuvor Einiges, das nicht ganz leicht war, haben lernen müssen. Das, was man hier zu lernen hat, hat aber auch nicht einmal den Anstrich von Schwierigkeit: es ist leichter als alles, was man sich immer leichtes denken mag. Das kann und wird vielleicht jedem Leser, der noch gar nichts von der Sache weis, und von ungefähr auf diese Stelle trifft, unglaublich scheinen — es ist dennoch buchstäblich wahr!

114. Wie ich mich bey dieser Anwendung der Combinationslehre, insbesondere bey dem allgemeinen Potenzen- und Produkten-Probleme, von denen vornehmlich hier die Rede ist, anfänglich verhalten habe, erhellet aus *Infin. Dign.* (§. XXI—XXIII, XXV und XXVII). Bekanntlich geräth man nicht gleich zuerst auf den kürzesten natürlichsten Weg; und so hat freylich die Sache nachher ein ganz anderes Ansehen gewonnen. Alles ist nachher (wie ich bereits im Arch. der Math. H. I. S. 14 in der Note erinnert habe) aufs möglichste simplificirt, alles auf reine combinatorische Begriffe gegründet, und sowohl die Hülfs- als anderen daraus abgeleiteten Sätze in den strengsten systematischen Zusammenhang gebracht worden. Ein Beyspiel davon mag die, auf dem Titel der Schrift angegebene, neue Bearbeitung der obengenannten allgemeinen Produkten- und Potenzen-Probleme darstellen. Beide Aufgaben werden, wie man finden wird, aus dem combinatorischen Boden in den analytischen gleichsam nur verpflanzt, und lassen sich aus dem Gebiete der einen Wissenschaft unmittelbar in das der andern herüber bringen.

115. Aufgabe. Es sind mehrere Reihen

$$a + b + c + d + e \ldots = p$$
$$A + B + C + D + E \ldots = q$$
$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d} + \mathfrak{e} \ldots = r$$

u. s. w. s.

gegeben: man verlangt die Produkte von zwey, drey, vier...m dieser Reihen, von den vorhergehenden niedrigern Produkten unabhängig.

116. Auflösung. Diese geben die Variationsclassen (25). Nach ihnen ist

$$qp = {}'\overset{qp}{B} \qquad rqp = {}'\overset{rqp}{C}$$
$$srqp = {}'\overset{srqp}{D} \qquad \ldots tsrqp = {}'\overset{\ldots tsrqp}{\mathfrak{M}}$$

(der Zeiger ist hier wie in 115)

Die Entwickelung dieser Classen, nach (25, α) giebt ein Produkt nach dem andern, jedes folgende aus dem nächstvorhergehenden; die Anordnung nach (25, β) giebt jedes verlangte Produkt für sich, und man hat, wegen der Involution, nicht nöthig, die vorhergehenden für die folgenden erst besonders abzusetzen (22).

117. Beweis. Man findet das Produkt qp, wenn man die einzelnen Glieder der Reihe q den einzelnen Gliedern von p nach und nach vorschreibt, und die so entstehenden Produkte zusammen addirt. Daraus findet man weiter rqp, wenn man mit den einzelnen Gliedern von r und qp eben so verfährt, wie vorher mit den Gliedern von q und p u. s. w. Das ist: Wenn man die einzelnen Dinge der Reihen p, q, r, s... als Factoren betrachtet, und die Produkte aus ihnen auf eben die Art classenweise sucht, wie in (25, α, β) die Variationen der gegebenen Elemente der einzelnen Reihen.

118. Aufgabe. Es sind mehrere Reihen

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 \ldots\ldots & & \\ a & + & bz & + & cz^2 & + & dz^3 & + & ez^4 \ldots & = & p \\ A & + & Bz & + & Cz^2 & + & Dz^3 & + & Ez^4 \ldots & = & q \\ \mathfrak{a} & + & \mathfrak{b}z & + & \mathfrak{c}z^2 & + & \mathfrak{d}z^3 & + & \mathfrak{e}z^4 \ldots & = & r \\ & & \text{u.} & & \text{s.} & & \text{w.} & & & & \text{f.} \end{array}$$

gegeben: man verlangt das allgemeine $(n+1)$te Glied der Produkte von zwey, drey, vier... m dieser Reihen, von den vorhergehenden niedrigern Produkten und Gliedern unabhängig.

119. Auflösung. Diese geben die Variationsclassen (39, 49). Nach ihnen ist

$$(qp)\rceil(n+1) = {}^{n+2}\overset{qp}{B}z^n; \quad (rqp)\rceil(n+1) = {}^{n+3}\overset{rqp}{C}z^n$$

$$(srqp)\rceil(n+1) = {}^{n+4}\overset{srqp}{D}z^n; (\ldots tsrqp)\rceil(n+1) = {}^{n+m}\overset{\ldots tsrqp}{\mathcal{M}}z^n$$

(der Zeiger ist hier, wie in 118)

Hier giebt (39) eine Classe nach der andern, und (49) jede für sich außer der Ordnung; nur muß man bey (49) in die letzte Verticalreihe die Buchstaben aus p (wie auch hier schon stehen), in die vorletzte die Buchstaben aus q, in die darauf folgende die Buchstaben aus r u. s. w. das ist, eben dieselben Buchstaben dem Namen nach, als in (49) bereits stehen, nur aus andern Alphabeten setzen (24). So wie in (49) ${}^{10}D$ gefunden worden, so kann man auch jede andere Classe sogleich finden.

120. Beweis. Daß für die $(n+1)$ten Glieder der Produkte aus zwey, drey, vier... m Reihen immer z^n kommen müsse, ist für sich klar. Nun fangen die Verbindungen der Coefficienten, bey zwey Reihen qp von ${}^2\overset{qp}{B}$, bey drey Reihen rqp von ${}^3\overset{rqp}{C}$, bey vier Reihen srqp von ${}^4\overset{srqp}{D}$ an, und gehen bey ihnen die Summenexponenten nach

der Ordnung der natürlichen Zahlen fort (102). Folglich gehören, für die $(n+1)$ten Glieder der Produkte der Reihen, die Variationsclassen für die Coefficienten und die Potenzen z^n so zusammen, wie in (119) ist angegeben worden.

121. Setzt man in die allgemeinen $(n+1)$ten Glieder nach und nach $n = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$ so findet man dieser Produkte einzelne Glieder nach der Ordnung

$$qp = {}^2\overset{qp}{B} + {}^3\overset{qp}{B}z + {}^4\overset{qp}{B}z^2 + {}^5\overset{qp}{B}z^3 + \&c$$

$$rqp = {}^3\overset{rqp}{C} + {}^4\overset{rqp}{C}z + {}^5\overset{rqp}{C}z^2 + {}^6\overset{rqp}{C}z^3 + \&c$$

$$srqp = {}^4\overset{srqp}{D} + {}^5\overset{srqp}{D}z + {}^6\overset{srqp}{D}z^2 + {}^7\overset{srqp}{D}z^3 + \&c$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\ldots tsrqp = {}^m\mathfrak{M} + {}^{m+1}\mathfrak{M}z + {}^{m+2}\mathfrak{M}z^2 + {}^{m+3}\mathfrak{M}z^3 \ldots$$

122. Die Entwickelung von Produkten der Reihen, solcher combinatorischen Formeln (116, 119, 121) ist leicht. Die einzelnen Glieder derselben weit fortgesetzt findet man in meiner Tafel (*Nov. Syst. Perm.* p. LXIX seq.). Ich habe hier für die Reihen (118) die einfachsten in Absicht auf die Exponenten gewählt, weil das für jede andern Exponenten hinreichend ist (133, 134). In meiner eben angeführten Tafel sind für die Exponenten der z in den Reihen die allgemeinen Progressionen $\mu, \mu+\delta, \mu+2\delta \ldots$; $\nu, \nu+\delta, \nu+2\delta \ldots$ u. s. w. gesetzt worden. Die Ursache (S. 24, o)

123. Aufgabe. Es ist die Reihe

$$a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + \&c = p$$

und die ganze positive Zahl m gegeben: man verlangt das allgemeine $(n+1)$te Glied der Potenz p^m, von den vorhergehenden Gliedern unabhängig.

124. Auflösung. Sie ist in der Formel:

$$p^m \rceil (n+1) = m\ {}^{m+n}\mathfrak{M}z^n$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \ldots \\ a, & b, & c & \ldots \end{matrix}\right)$$

enthalten. Hier ist die Combinationsclasse $\mathfrak{M}$ aus (41, 49) mit der Versetzungszahl m verbunden (104).

125. Beweis. Die Reihe p (123) m mal gesetzt und in sich multiplicirt, würde nach und nach alle Potenzen von p, bis mit der gesuchten mten geben. Wären nun die m Factoren nicht (wie hier) einerley, sondern alle verschieden, wie p, q, r ... in (118), so wäre das (n+1)te Glied ihres Produkts, das ist

$$(\ldots tsrqp) \rceil (n+1) = {}^{n+m}\mathfrak{M}z^n \qquad (119)$$

Da aber hier p = q = r = s = t = &c, so kommen in ihrem Produkte unter den Complexionen (Binionen, Ternionen, Quaternionen ... mtionen) der Coefficienten der gegebenen Reihe, mehrere vor, die, der Zahl und Art nach, eben dieselben, nur verschiedentlich versetzte Buchstaben enthalten, folglich (als Produkte derselben Factoren, nur in verschiedener Ordnung und Lage) nicht verschieden sind. Diese dürfen also nur überhaupt gezählt und ihre Zahl (die Versetzungszahl) den zugehörigen Combinationscomplexionen, welche die übrigen repräsentiren, nach der Erinnerung (104) beygefügt werden, dadurch verwandelt sich das obige ${}^{m+n}\mathfrak{M}$ in m ${}^{m+n}\mathfrak{M}$ (wo m die Versetzungszahl oder der Polynomialcoefficient der einzelnen Complexionen der Combinationsclasse $\mathfrak{M}$ ist) und so kommt

$$p^m \rceil (n+1) = m\ {}^{m+n}\mathfrak{M}z^n$$

mit dem Zeiger, wie in (124).

126. Die einzelnen Glieder für p^m nach der Reihe zu finden, darf man nur $n = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$ nach einander setzen. Das giebt:

$$p^m = \mathfrak{m}^m\mathfrak{N} + \mathfrak{m}^{m+1}\mathfrak{N}z + \mathfrak{m}^{m+2}\mathfrak{N}z^2 + \&c$$

daraus folgt, $m = 1, 2, 3, 4 \ldots$ also $\mathfrak{N} = A, B, C, D \ldots$ und $\mathfrak{m} = a, b, c, d \ldots$ nach und nach gesetzt:

$$p^1 = a^1A + a^2Az + a^3Az^2 + a^4Az^3 + \&c$$

$$p^2 = b^2B + b^3Bz + b^4Bz^2 + b^5Bz^3 + \&c$$

$$p^3 = c^3C + c^4Cz + c^5Cz^2 + c^6Cz^3 + \&c$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ a & b & c & d & \ldots \end{pmatrix}$$

127. Ich habe von den Combinationen in (41) hier (125, 126) nur die Classeninvolutionen ausgehoben, und die Versetzungszahlen a, b, c... $\mathfrak{m}$ zu den einzelnen Classen gesetzt. In (41) werden die Classen, eine aus der andern, hergeleitet. Wie jede Classe unabhängig (wie hier vornehmlich verlangt wird) gefunden werden könne, zeigt (49) an dem Beyspiele von ${}^{10}D$ ganz allgemein.

128. Aufgabe. Die Reihe (123)

$$a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + \&c = p$$

auf die Potenz des Exponenten m zu erheben, die Zahl m mag eine ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl seyn.

129. Auflösung. Das erste Glied von p^m ist a^m, und das (n+1)te oder

$$p^m \mathfrak{P}(n+1) = ({}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1}\, \mathfrak{a}^n A + {}^m\mathfrak{B}\, a^{m-2}\, \mathfrak{b}^n B$$

$$+ {}^m\mathfrak{C}\, a^{m-3}\, \mathfrak{c}^n C \ldots + {}^m\mathfrak{N}\, a^{m-n}\, \mathfrak{n}^n \mathfrak{N}) z^n$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ b & c & d & e & \ldots \end{pmatrix}$$

Die hier gebrauchten Zeichen sind aus dem Vorhergehenden schon bekannt; auch findet man ihre Erklärung (S. 70, 71) beysammen, wo der $(n+1)$te Coefficient derselben Potenz, wie hier das $(n+1)$te Glied ist angegeben worden.

130. **Beweis.** Man setze die Reihe (128) $p = a + Z$. Der binomische Lehrsatz giebt sodann, für jedes m,

$$p^m = a^m + {}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1} Z^1 + {}^m\mathfrak{B}\, a^{m-2} Z^2 + {}^m\mathfrak{C}\, a^{m-3} Z^3 \ldots$$

Die Potenzen $Z^1, Z^2, Z^3 \ldots$ giebt (126); darnach ist

$$Z^1 = \mathfrak{a}^1 A z^1 + \mathfrak{a}^2 A z^2 + \mathfrak{a}^3 A z^3 \ldots + \mathfrak{a}^n A z^n \ldots$$

$$Z^2 = \qquad \mathfrak{b}^2 B z^2 + \mathfrak{b}^3 B z^3 \ldots + \mathfrak{b}^n B z^n \ldots$$

$$Z^3 = \qquad \qquad \mathfrak{c}^3 C z^3 \ldots + \mathfrak{c}^n C z^n \ldots$$

$$\cdot \qquad \qquad \cdot \qquad \cdot$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ b & c & d & e & \ldots \end{pmatrix}$$

(Man bekommt nehmlich hier gleich in die ersten Glieder der Potenzen von Z die Potenzen $z^1, z^2, z^3 \ldots$ weil hier $Z = bz + cz^2 \ldots$ gleich im ersten Gliede z hat, welches sich bey $p = a + bz \ldots$ in (126) anders verhält). Nimmt man nun alle Glieder, in denen z^n vorkommt, mit den zugehörigen Binomialcoefficienten und Potenzen von a (nach dem obigen, vermittelst der Binomialformel, ausgedrückten Werthe für p^m) zusammen; denn diese machen mit einander das gesuchte $(n+1)$te Glied aus, a^m als das erste gezählt: so erhält man die Formel, wie sie in (129) steht.

131. Die einzelnen Glieder für p^m (128), nach dem ersten a^m, zu finden, darf man nur in dem allgemeinen Gliede (129) nach und nach $n = 1, 2, 3, 4 \ldots$ setzen. Das giebt

$$
\begin{aligned}
p^m = \; & a^m \\
& + {}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1}\, \mathfrak{a}^1 A z^1 \\
& + ({}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1}\, \mathfrak{a}^2 A + {}^m\mathfrak{B}\, a^{m-2}\, \mathfrak{b}^2 B) z^2 \\
& + ({}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1}\, \mathfrak{a}^3 A + {}^m\mathfrak{B}\, a^{m-2}\, \mathfrak{b}^3 B + {}^m\mathfrak{C}\, a^{m-3}\, \mathfrak{c}^3 C) z^3 \\
& + \quad \&c \quad \&c \quad \&c \quad \&c
\end{aligned}
$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & . & . & . \\ b & c & d & e & . & . & . \end{matrix}\right)$$

Die Entwickelung der Coefficienten von p^m, vom ersten bis mit dem neunten Gliede, steht (S. 69, 70) ausführlich angegeben. Die dortigen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \ldots$ sind meine Binomialcoefficienten ${}^m\mathfrak{A}$, ${}^m\mathfrak{B}$ ${}^m\mathfrak{C} \ldots$

132. Aufgabe. Die Reihe

$$a + b + c + d + e + f + \&c = p$$

auf die Potenz des Exponenten m zu erheben.

133. Auflösung.

1) wenn m eine ganze positive Zahl.

Dann ist $p^m \urcorner (n+1) = \mathfrak{m}\; {}^{m+n}\mathfrak{M}$

$$
\begin{aligned}
\text{also } p^m = \; & \mathfrak{m}\; {}^m\mathfrak{M} + \mathfrak{m}\; {}^{m+1}\mathfrak{M} \\
& + \mathfrak{m}\; {}^{m+2}\mathfrak{M} \ldots = \mathfrak{m}\, \mathfrak{M}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{und } p^1 &= \mathfrak{a}^1 A + \mathfrak{a}^2 A + \mathfrak{a}^3 A + \mathfrak{a}^4 A \ldots = \mathfrak{a}' A \\
p^2 &= \mathfrak{b}^2 B + \mathfrak{b}^3 B + \mathfrak{b}^4 B + \mathfrak{b}^5 B \ldots = \mathfrak{b}' B \\
p^3 &= \mathfrak{c}^3 C + \mathfrak{c}^4 C + \mathfrak{c}^5 C + \mathfrak{c}^6 C \ldots = \mathfrak{c}' C \\
& \quad . \qquad . \qquad . \qquad . \qquad .
\end{aligned}
$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & . & . & . \\ a & b & c & d & e & . & . & . \end{matrix}\right)$$

2) wenn m eine ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl, so

ist $p^m \,]\, (n+1) = {}^m\mathfrak{N}\, a^{m-n}\, n'\mathcal{N}$

und $p^m = a^m + {}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1}\, a'A + {}^m\mathfrak{B}\, a^{m-2}\, b'B + {}^m\mathfrak{C}\, a^{m-3}\, c'C + \&c$

(b c d e f . . .)

134. Beweis. So wie die Reihe (123) sich in die gegebene (132) verwandelt, wenn man in jener $z = 1$ setzt, eben so findet man durch dieselbe Substitution in den Formeln (124, 126) mit Zuziehung von (104) die Formeln für (133, 1) und gleichergestalt die, in (132, 2) wenn man $z = 1$ in die Formel für p^m (131) setzt, und die Glieder, wie sie nach dem dortigen Ausdrucke senkrecht unter einander kommen, nach (105) summirt, und durch $a'A$, $b'B$, $c'C$ . . . . $n'\mathcal{N}$ ausdrückt.

135. Die obigen beiden Ausdrücke für $p^m \,]\, (n+1)$ und der für p^m (133, 2) kommen auch (S. 67, 68) vor, und werden daselbst erklärt. Eine ausführliche Darstellung der ersten sieben Glieder von p^m (Ebendas. S. 67) Die dortigen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ . . . sind meine Binomialcoefficienten ${}^m\mathfrak{A}$, ${}^m\mathfrak{B}$, ${}^m\mathfrak{C}$ . . .

136. Hier (134) ist die Potenz m der Reihe $a + b + c + d + \&c$ aus jener der Reihe $a + bz + cz^2 + dz^3 + \&c$ abgeleitet worden. Man hätte jene, eben so wie diese, ganz independent behandeln können; ich habe aber den eingeschlagenen Weg, der Kürze wegen, vorgezogen, habe auch bey den Potenzen, wie bey den Produkten (122) die am einfachsten ausgedrückte Reihe $a + bz + cz^2$ . . . zum Grunde gelegt. Meine Formeln für Potenzen (*Nov. Syst. Perm.* p. LIV, 7, 8) beziehen sich auf die am allgemeinsten ausgedrückte Reihe $az^{\alpha} + bz^{\alpha+\delta} + cz^{\alpha+2\delta}$ . . . (S. 24, 0)

137. Es ist nützlich, die Vergleichung der Lokalzeichen für Potenzen mit den combinatorischen, etwas näher

nachzuweisen, welches am füglichsten durch die Formeln (124, 129) geschehen kann, bey denen, wenn man blos die Coefficienten, ohne den Factor z^n betrachtet, der Localausdruck $p^m \,]\, (n+1)$ in $p^m \varkappa (n+1)$ sich verwandelt.

138. Daraus, und aus (124) folgt, für ganze positive Zahlen m

$p^1 \varkappa (n+1) = \mathfrak{a}^{n+1} A$	$p^5 \varkappa (n+1) = \mathfrak{e}^{n+5} E$
$p^2 \varkappa (n+1) = \mathfrak{b}^{n+2} B$	. . . .
$p^3 \varkappa (n+1) = \mathfrak{c}^{n+3} C$	$p^m \varkappa (n+1) = \mathfrak{m}^{n+m} \mathfrak{M}$
$p^4 \varkappa (n+1) = \mathfrak{d}^{n+4} D$	$p^m \varkappa (n-m+1) = \mathfrak{m}^{n} \mathfrak{M}$

$$p \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \\ a & b & c & d & e & f & \ldots \end{pmatrix}$$

139. Eben so folgt aus (137 und 129) für jeden Werth von m

$$p^m \varkappa 1 = a^m$$

$$p^m \varkappa 2 = {}^{m}\mathfrak{A}\, a^{m-1} \mathfrak{a}^1 A$$

$$p^m \varkappa 3 = {}^{m}\mathfrak{A}\, a^{m-1} \mathfrak{a}^2 A + {}^{m}\mathfrak{B}\, a^{m-2} \mathfrak{b}^2 B$$

$$p^m \varkappa 4 = {}^{m}\mathfrak{A}\, a^{m-1} \mathfrak{a}^3 A + {}^{m}\mathfrak{B}\, a^{m-2} \mathfrak{b}^3 B + {}^{m}\mathfrak{C}\, a^{m-3} \mathfrak{c}^3 C$$

. . . .

$$p^m \varkappa (n+1) = (\text{dem Coefficienten von } z^n \text{ in } 129)$$

$$p \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\ a & b & c & d & e & f & \ldots \end{pmatrix}$$

Die in (138 und 139) unter den Formeln beygefügten Nachweisungen zeigen 1) die Coefficienten a, b, c... der Reihe p, und 2) was für Zahlenwerthe denselben bey den Classencomplexionen zukommen.

140. Solche Vergleichungen der beiderley (lokal- und combinatorischen) Zeichen und Formeln sind wichtig, weil jene, als Stellvertreter der letztern, wegen ihrer signi-

stanten Kürze, während des Calculs und selbst in den Formeln für die Endresultate (S. 13 Note k) häufig gebraucht werden (4. S. 157). Sie knüpfen gleichsam das Band zwischen der gewöhnlichen und der combinatorischen Analysis, und man kann, wenn die Relation zwischen beiden gegeben ist, sogleich aus den Lokalausdrücken in die combinatorischen, und aus diesen in die der gewöhnlichen algebraischen Sprache übergehen. Von solchen Relationen für Potenzen, wie hier (*Nov. Syst. Perm.* p. LI, und die dortigen Exempel p. LI und LII) für Produkte (Ebendas. p. LII, LIII).

141. Nun sey auch m in (139) eine ganze positive Zahl: so geben, die beiden Werthe von $p^m \varkappa (n+1)$ in (138, 139 oder 129) einander gleich gesetzt, folgende Relation:

$$\mathfrak{m}^{n+m}\mathcal{M} = {}^{m}\mathfrak{A}\, a^{m-1}\, a^n A' + {}^{m}\mathfrak{B}\, a^{m-2}\, b^n B + {}^{m}\mathfrak{C}\, a^{m-3}\, c^n C + \&c$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ a & b & c & d & \cdots \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\ b & c & d & e & f & \cdots \end{pmatrix}$$

Die Glieder rechter Hand brechen mit demjenigen ab, wo zuerst die Zahl des Binomialcoefficienten so groß wie m, oder die der Classe so groß wie n ist. Diese Formel giebt einzelne höhere Classen der Potenzen durch Summen von niedrigern Classen. Auf ähnliche Art habe ich sie bereits (*Nov. Syst. Perm.* p. LV, 9) hergeleitet. Man vergleiche hier (96).

142. Die Buchstaben m, $\mathfrak{m}$, $\mathcal{M}$ bestimmen einander dergestalt, daß ein Werth des einen die ähnlichen Werthe der beiden andern festsetzt. Hier mögen Zahlenwerthe für m angenommen, die Werthe der $\mathfrak{m}$ und $\mathcal{M}$ bestimmen.

Für $m = 1$ wird $\mathfrak{a}^{n+1}A = {}^{1}\mathfrak{A}\, a^0\, \mathfrak{a}^n A$

" $m = 2$ " $\mathfrak{b}^{n+2}B = {}^{2}\mathfrak{A}\, a^1\, \mathfrak{a}^n A + {}^{2}\mathfrak{B}\, a^0\, \mathfrak{b}^n B$

" $m = 3$ " $\mathfrak{c}^{n+3}C = {}^{3}\mathfrak{A}\, a^2\, \mathfrak{a}^n A + {}^{3}\mathfrak{B}\, a^1 \mathfrak{b}^n B + {}^{3}\mathfrak{C}\, a^0\, \mathfrak{c}^n C$

" $m = 4$ " $\mathfrak{d}^{n+4}D = {}^{4}\mathfrak{A} a^3 \mathfrak{a}^n A + {}^{4}\mathfrak{B} a^2 \mathfrak{b}^n B \ldots + {}^{4}\mathfrak{D} a^0 \mathfrak{d}^n D$

" $m = 5$ " $\mathfrak{e}^{n+5}E = {}^{5}\mathfrak{A} a^4 \mathfrak{a}^n A + {}^{5}\mathfrak{B} a^3 \mathfrak{b}^n B \ldots + {}^{5}\mathfrak{E} a^0 \mathfrak{e}^n \mathfrak{E}$

. . . . . .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots \\ a & b & c & \ldots \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ b & c & d & e & \ldots \end{pmatrix}$$

Eben so lassen sich auch Werthe für n bestimmen (*Nov. Syst. Perm.* p. LV, 10).

Für $\mathfrak{e}^{15}E$ wäre $n = 10$, also käme

$$\mathfrak{e}^{15}E = {}^{5}\mathfrak{A} a^4 \mathfrak{a}^{10} A + {}^{5}\mathfrak{B} a^3 \mathfrak{b}^{10} B + {}^{5}\mathfrak{C} a^2 \mathfrak{c}^{10} C + {}^{5}\mathfrak{D} a^1 \mathfrak{d}^{10} D + {}^{5}\mathfrak{E} a^0 \mathfrak{e}^{10} E$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots \\ a & b & c & \ldots \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\ b & c & d & e & f & \ldots \end{pmatrix}$$

Man vergleiche (54. S. 191) und das Exempel (*Nov. Syst.* p. LVI, 11).

143. Lehrsatz. Aus der Reihen $p, q, r, s \ldots$ (118)

Potenzen, nach der Ordnung,

$$p^a = p^a \varkappa 1 + p^a \varkappa 2 z^1 + p^a \varkappa 3 z^2 + p^a \varkappa 4 z^3 \ldots$$
$$q^b = q^b \varkappa 1 + q^b \varkappa 2 z^1 + q^b \varkappa 3 z^2 + q^b \varkappa 4 z^3 \ldots$$
$$r^c = r^c \varkappa 1 + r^c \varkappa 2 z^1 + r^c \varkappa 3 z^2 + r^c \varkappa 4 z^3 \ldots$$
$$s^d = s^d \varkappa 1 + s^d \varkappa 2 z^1 + s^d \varkappa 3 z^2 + s^d \varkappa 4 z^3 \ldots$$

. . . . . .

folgt das allgemeine $(n+1)$te Glied,

1. Für das Produkt aus zwey Potenzen

$$(q^b p^a) \urcorner (n+1) = {}^{n+2}\overset{q^b p^a}{B} z^n$$

$$\text{also } q^b p^a = {}^2\overset{q^b p^a}{B} + {}^3\overset{q^b p^a}{B} z + {}^4\overset{q^b p^a}{B} z^2 + {}^5\overset{q^b p^a}{B} z^3 + \&c$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \ldots \\ p^a \varkappa 1 & p^a \varkappa 2 & p^a \varkappa 3 & p^a \varkappa 4 \ldots \\ q^b \varkappa 1 & q^b \varkappa 2 & q^b \varkappa 3 & q^b \varkappa 4 \ldots \end{matrix}\right)$$

wenn man in dem allgemeinen Gliede, 0, 1, 2, 3 ... nach und nach für n setzt.

II. Für das Produkt aus drey Potenzen

$$(r^c q^b p^a) \urcorner (n+1) = {}^{n+3}\overset{r^c q^b p^a}{C} z^n$$

$$\text{also } r^c q^b p^a = {}^3\overset{r^c q^b p^a}{C} + {}^4\overset{r^c q^b p^a}{C} z + {}^5\overset{r^c q^b p^a}{C} z^2 + {}^6\overset{r^c q^b p^a}{C} z^3 + \&c$$

$$\left[\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \ldots \\ p^a \varkappa 1 & p^a \varkappa 2 & p^a \varkappa 3 & p^a \varkappa 4 \ldots \\ q^b \varkappa 1 & q^b \varkappa 2 & q^b \varkappa 3 & q^b \varkappa 4 \ldots \\ r^c \varkappa 1 & r^c \varkappa 2 & r^c \varkappa 3 & r^c \varkappa 4 \ldots \end{matrix}\right]$$

wenn man in dem allgemeinen Gliede, 0, 1, 2, 3 ... nach und nach für n setzt.

III. Für das Produkt aus m Potenzen

$$(\ldots s^d r^c q^b p^a) \urcorner (n+1) = {}^{n+m}\overset{\ldots s^d r^c q^b p^a}{\mathfrak{M}} z^n$$

$$\text{also } \ldots s^d r^c q^b p^a = {}^m\overset{\ldots s^d r^c q^b p^a}{\mathfrak{M}} + {}^{m+1}\overset{\ldots s^d r^c q^b p^a}{\mathfrak{M}} z + {}^{m+2}\overset{\ldots s^d r^c q^b p^a}{\mathfrak{M}} z^2 + \&c$$

(Der Zeiger enthält die Coefficienten nach der Ordnung, aller m Potenzreihen, wie sie in (143) stehen.)

Auch hier kommt der Ausdruck für die einzelnen Glieder aus dem allgemeinen, wenn man 0, 1, 2, 3 ... nach und nach für n setzt.

144. **Beweis.** So vielfach und zusammengesetzt der Lehrsatz (143) auch an sich ist, so leicht ist gleichwohl der combinatorische Beweis desselben hier an dieser Stelle.

Daß die Variationsclassen $B, C \ldots \mathfrak{M}$ kommen müssen, erhellet daraus, daß zwey, drey... m Reihen (wie hier in 143) in einander multiplicirt, alle Binionen, Ternionen... $m$tionen ihrer Coefficienten geben (129, 125) und weil diese (nach dem Zeiger) alle von 1 an, nach der Ordnung gezählt werden, so fängt B mit dem Summenexponenten 2, und C mit 3... und $\mathfrak{M}$ mit m an, und gehen dieselben nach der Ordnung der natürlichen Zahlen fort; daher für die (n+1)ten Glieder oder Coefficienten nothwendig ${}^{n+2}B, {}^{n+3}C \ldots {}^{n+m}\mathfrak{M}$ kommen müssen. Der Fortgang für die Potenzexponenten 0, 1, 2, 3 ... von z, ist für sich klar; und so kommt überall z^n für die (n+1)ten Glieder. Die beygefügten Zeiger anlangend, so darf man darinn $p^a \varkappa 1$, $p^a \varkappa 2 \ldots q^b \varkappa 1$, $q^b \varkappa 2 \ldots$ u. s. w. als bekannt voraussetzen, weil die Reihen p, q, r, s... gegeben sind, und nach meinen (lokal- und combinatorischen) Potenzformeln die $p^a \varkappa (n+1)$, $q^b \varkappa (n+1)$ u. s. w. durch $p \varkappa (n+1)$, $q \varkappa (n+1)$ u. s. w. sich ausdrücken lassen. Die Construction der Variationsclassen vermittelst der beygefügten Zeiger, hängt von Tab. IV (Nov. Syst. p. LX) ab, in so fern man sich die Complexionen (nach 18, 25) nicht selbst machen will.

Von dieser und ähnlichen Voraussetzungen sehe man (150, 15). Auf ihnen beruhen die so nützlichen Reductionen der Probleme auf einander, der zusammengesetztern auf die einfachern, davon Herr Prof. Pfaff in seinen beiden Abhandlungen (IV, V) eine Menge interessanter Beyspiele gegeben hat, die, ohne den Gebrauch der Lokalausdrücke zum Theil auf außerordentliche Verwickelungen geführt haben würden (Vergl. S. 126. Anm.; S. 157, 158).

145. Die Ausdrücke (143, I-III) für ganze Glieder $\mathfrak{I}$ (n+1) verwandeln sich sogleich in solche für

einzelne Coefficienten $\varkappa(n+1)$; wenn man dort $z=1$ setzt, wo also z und alle Potenzen von z, ganz wegfallen, und nur die Variationsclassen allein, mit ihren Summen- und Reihenexponenten, übrig bleiben.

146. Aufgabe. Den Werth von $(r^c q^b p^a)\varkappa 3$, in Coefficienten der einzelnen Potenzen p^a, q^b, r^c auszudrücken. Die Reihen p, q, r stehen (118).

Auflösung. In (143, II) setze man $n=2$; $z=1$ und (145) $\varkappa$ statt $\mathfrak{7}$, so findet man

$$(r^c q^b p^a)\varkappa(2+1) = {}^3\overset{r^c q^b p^a}{C}$$

das giebt, nach dem Zeiger (143, II) die Complexionen selbst gemacht, oder nach Tab. IV (Nov. Syst. Perm. p. LX) und den dort überschriebenen Reihenexponenten r, q, p angeordnet:

$r^c\varkappa 1$	$q^b\varkappa 1$	$p^a\varkappa 3$	$r^c\varkappa 2$	$q^b\varkappa 1$	$p^a\varkappa 2$
$r^c\varkappa 1$	$q^b\varkappa 2$	$p^a\varkappa 2$	$r^c\varkappa 2$	$q^b\varkappa 2$	$p^a\varkappa 1$
$r^c\varkappa 1$	$q^b\varkappa 3$	$p^a\varkappa 1$	$r^c\varkappa 1$	$q^b\varkappa 3$	$p^a\varkappa 1$

wo man $r^c\varkappa 1$ und $r^c\varkappa 2$ als factores communes in die zugehörigen Nebenfactoren nehmen, oder jede andere, aus den übrigen dazu wählen kann; diejenigen nehmlich, die am meisten zusammengesetzt sind. Ein anderes Beyspiel für den nächstfolgenden Coefficienten $(r^c q^b p^a)\varkappa 4$, steht im Archiv der Math. (H. II. S. 227). Der hiesige Lehrsatz (143) mit seinem Beweise (144) ist nehmlich bereits dort, etwas ausführlicher, zugleich mit der Anwendung auf gebrochene Functionen, vorgetragen worden.

III. Vergleichung des von Herrn Etatsrath Tetens bey den allgemeinen Produkten- und Potenzen-Problemen angebrachten Substitutionsverfahrens (hier, Abh. I. S. 1—47) mit der Hindenburgischen Combinationsmethode.

147. Herr Etatsrath Tetens scheint, wegen der Combinationsmethode und ihrer Anwendung auf die beiden eben genannten Probleme, sich ganz an meine erste, von ihm allein (S. 1) angeführte Schrift (*Infin. Dign.* 1779) gehalten zu haben. Ich kann zwar voraussetzen, daß ihm die, zwey Jahre später (1781) von mir herausgegebenen, in Absicht auf combinatorische Zeichen und Sätze schon viel vollkommnern (Arch. der Math. H. II. S. 251, 252) Novi Syst. Perm. et Comb. — primae Lineae nicht unbekannt geblieben sind; da aber die erste Schrift ihm über die combinatorische Behandlung beider Sätze (an deren allgemeiner, aber auch zugleich so viel immer möglich leichter und für die Anwendung brauchbarer Auflösung, ihm viel gelegen seyn mußte *) vollkommen Auskunft gegeben hatte: so fragt sich's, ob ihm bey seinen vielen Geschäften von ganz anderer Art, Zeit und Lust genug übrig geblieben sey, die Vorzüge dieser zweyten Schrift, in Begründung der neuen Methode mit ihren Operationen und der darinn gegebenen weitern Aussichten, in reifliche

*) Vornehmlich, was die Bestimmung der Coefficienten der Potenzen des Polynomiums anbetrifft. Herr Tetens hat bey der häufigen Anwendung von Wahrscheinlichkeitsberechnung auf mehrere Gegenstände, viel Veranlassung gehabt, über das Polynomium zu arbeiten, und ist von Zeit zu Zeit auf diese wichtige analytische Untersuchung, wie er sie nennt, zurückgekommen (dess. Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften; 2 Th. S. 110, 141; Leipz. Magaz. der Math. 1787. St. I S. 55—62; auch hier, S. 46, 47). Die im ersten Aufsatze hier mitgetheilte Auflösung hat unverkennbare Vorzüge. Herr Tetens hält sie für vollendet; auch ist selbige unter allen nicht-combinatorischen die leichteste für die Ausübung.

Erwägung zu ziehen. Es sind vielmehr in der Abhandlung dieses vortreflichen Analysten (S. 1—47) deutliche Spuren vorhanden, daß das nicht geschehen sey *). Von den weitern Vorschritten und Anwendungen der Combinationsmethode, bey ihrer immer mehr erfolgten Vervollkommnung, theils in einzelnen, größtentheils akademischen Schriften, von mir so wie der Herren Eschenbach, Toepfer, Rothe, Burckhardt, theils andern, im Archiv der Mathematik neuerlich eingerückten eigenen und fremdem Aufsätzen, muß ich also annehmen, daß sie ihm wohl größtentheils unbekannt geblieben sind, einige auch (wie z. B. mein Programm über Moivre's Polynomialtheorem, mehrere Hefte des Archivs der Mathematik, und die neueste combinatorisch-analytische Schrift des Herrn von Prasse) vor der Ausarbeitung seiner Abhandlung über die formulam polymonialem, nicht haben bekannt werden können.

148. Die Combinationsmethode betreffend, wird (S. 1—4) erkläret: Sie sey auf ziemlich einfache Grundsätze und Operationen gebracht; ihre Brauchbarkeit bey dem Polynomialpotenzenprobleme sowohl (dessen Glieder sie ganz allgemein außer ihrer Folge zu finden lehre) als bey verschiedenen andern analytischen Problemen, sey auch bereits anerkannt; man könnte daher das Combiniren eben sowohl unter die analytischen Methoden auf-

*) Zum Beweise will ich hier nur die Unbekanntschaft mit meinen beiden (lokal- und combinatorischen) Formeln (*Nov. Syst. Perm. p.* LI, Ex. I und p. LV, 9, 10) anführen, von denen die erste zwar (*Infin. Dign. p.* 71, 3) aber da nicht so vollkommen (wie dort) gezeichnet, die andere aber gar nicht daselbst vorkommt. Hätte Herr Etatsrath Tetens mein *Nov. Syst.* eben so aufmerksam, als meine *Infin. Dign.* durchgelesen und geprüft, so würde ihm seine Grundformel (Seite 13. Satz 4) eben so wenig, als die Anwendung derselben durch Substitution, neu vorgekommen seyn. Man vergleiche meine dortige Note k S. 12—14; und hier (S. 248, 249).

nehmen, als das Differenziiren und Integriren, und sich gefallen lassen, die von den gewöhnlichen ganz abweichenden verschiedenen Arbeiten zuvor zu lernen, auf welche die combinatorisch ausgedrückten Formeln, statt der gewöhnlichen analytischen Operationen, verweisen — Allein, diesen neu zu erlernenden Arbeiten werde man dennoch lieber entgehen wollen, wenn sich ihnen entgehen lasse; und das könne auf einem Wege geschehen, auf welchem man, durch ganz leichte, blos analytische Substitutionen, ohne daß eine andere Operation mit den Größen dabey nöthig sey, eben dahin gelange, wohin die Combinationsmethode führe. Diesen neuen Weg wolle Herr T. in seiner Abhandlung, bey dem Polynomialpotenzenprobleme anweisen. Dadurch werde die Combinationsmethode bey diesem Probleme ganz entbehrlich. Dies werde sie auch bey andern analytischen Problemen, wo man seine Zuflucht zu ihr genommen hat.

149. Was ich hierauf zu antworten habe, betrifft zunächst eine kurze Entschuldigung, die Herrn Tetens, wegen der so eben (148) angeführten Aeußerung, billigerweise zu statten kommt. Dieser soll eine etwas ausführlichere Rechtfertigung meiner Combinationsmethode, sowohl an sich als besonders in Vergleichung mit dem vorgeschlagenen neuen Substitutionsverfahren, folgen.

150. Die später herausgegebenen, und eben deswegen die Methode vollkommner darstellenden, combinatorisch-analytischen Schriften, gründen sich sämtlich auf die im *Nov. Syst. Perm.* festgesetzten Begriffe, Zeichen, Operationen, Sätze und Formeln, wodurch manches in den *Infin. Dign.* näher bestimmt, modificirt, erweitert, abgeändert wird. Da nun aus der Note zu (147) ganz deutlich, und durch das in der Folge weiter beyzubringende noch augenscheinlicher, erhellet, Herr T. habe sich

mit diesem *Nov. Syst.* nicht so bekannt gemacht, als mit jenen Infinit. Dignitatibus; Manches, die Combinations-methode wesentlich Betreffendes, vielleicht gar nicht, vielleicht nicht in seinem wahren und ganzen Umfange kennen gelernt, dahin vorzüglich die combinatorischen Involutionen zu rechnen sind, davon zwar Beyspiele in jener ersten Schrift bereits vorkommen, diese wichtige Sache aber, in ihrem ganzen Umfange, im ersten Bande des Archivs der reinen und angewandten Mathematik und zum Theil auch hier, allererst entwickelt und vollendet worden ist — so wird man sich wohl keiner Uebereilung schuldig machen, wenn man annimmt, es sey, unter diesen Umständen, noch nicht Zeit gewesen, über den Werth oder Unwerth der combinatorisch-analytischen Methode öffentlich abzusprechen, die Akten seyen, für ein vollgültiges Urtheil darüber, wie es für den gegenwärtigen Zustand *) der Wissenschaft passend wäre, nicht vollständig instruirt gewesen. Hierbey kommt Herrn Etatsrathe Tetens allerdings noch zu statten, daß er ohne Zweifel in den Gedanken gestanden hat, und durch die Sache selbst gewissermaßen ist veranlaßt worden, so zu denken „meine „erste Schrift (*Infin. Dign.*) die sich, selbst dem Titel „nach, recht eigentlich, fast ganz ausschließlich, und überdies noch so umständlich und ausführlich, über die bei-

*) Von der allmähligen Verbesserung der combinatorischen Methode zeigen die späterhin von mir herausgegebenen Abhandlungen; dahin unter andern meine *Paralipomena — ad Ser. Revers.* (1793) zu rechnen sind. Hier will ich mich noch auf die im Frühjahre 1794 geschriebene Note zu meinem ersten Aufsatze über combinatorische Involutionen (Arch. der Math. 1. H. S. 14) berufen, wo ich von der Wichtigkeit spreche, alles aus rein-combinatorischen Begriffen abgeleitet, und in den strengsten systematischen Zusammenhang gebracht zu haben. Vielleicht hat Herr Tetens eben um diese Zeit seine Abhandlung über die *formulam polynomialem* aufgesetzt, wo die Combinationsmethode bereits sehr weit über die anfänglichen ersten Gränzen sich erstreckt und ausgebreitet hatte. Dies nur zur Rechtfertigung der Sache an sich; Herrn T. kann dabey nichts zur Last gelegt werden.

„den Probleme, die in seiner Schrift abgehandelt werden, „ausbreitet, enthalte alles Nöthige zu Fällung einer „Sentenz über die dabey gebrauchte Methode.“ Es ist sehr verzeihlich, unter den Umständen so zu denken; aber die Sache verhält sich gleichwohl ganz anders. In Absicht auf die Methode selbst, ist das Novum Systema immer die Hauptschrift, die selbst noch durch einige Folgeschriften ist erweitert worden. Die Infinit. Dignitates enthalten die ersten Umrisse der noch unvollkommnern Methode, gute Materialien und mannichfaltige Anwendungen in mehrern Beyspielen (auch nützliche, zum Theil ausführliche Tafeln) was für die nächste Schrift nicht alles wiederholt werden durfte. Das Novum Systema ist nicht etwa eine Fortsetzung von den Infinit. Dignitatibus; es ist, wie gesagt, die Hauptschrift, welche die combinatorische Methode ausführlicher darstellt, und weitere Aussichten ihrer sehr ausgebreiteten Anwendung giebt (Toepf. comb. Anal. S. 189, 190; auch hier 4 und 5, S. 156 — 160).

151. So viel zur Entschuldigung, wegen Herrn Tetens Aeußerung über meine Combinationsmethode! — und nun auch etwas zu Rechtfertigung derselben, gegen das angebliche Surrogat dafür — das vorgeschlagene Substitutionsverfahren.

Ich habe zwar meine Erinnerungen dagegen verschiedentlich in Anmerkungen bey Herrn Tetens Abhandlung, zu mehrerer Bequemlichkeit der Leser, sogleich an Ort und Stelle, beygebracht; aber die Wichtigkeit der Sache scheint eine etwas detaillirtere Vergleichung beider Verfahren im Zusammenhange nothwendig zu machen.

152. Herr Tetens erklärt (S. 3) er habe für die Potenz eines Polynomiums eine in der Ausübung leichte blos analytische Formel gefunden, wobey man die Combinationsmethode nicht nöthig habe; und so sey dies gewissermaßen als eine Erweiterung der Analysis

anzusehen. Die Ausdrücke, wie sie in dieser Formel zu Bezeichnung der Terminorum generalium vorkommen, sind von der Gattung, die ich Lokalausdrücke zu nennen pflege, und man findet die allgemeine Vergleichung derselben mit meinen Lokalzeichen (in der Note g. S. 7, 8) ausführlich angegeben. Hier hat man also eine verschiedene Bezeichnung derselben Sache. Das ist nichts besonders, und kann nicht wohl anders seyn, wenn Jeder seinen eigenen Weg geht. Aber — was man nicht vermuthen sollte — die (§. 8. Satz 4. S. 13) aufgeführte neue Formel für den allgemeinen Ausdruck des nten Coefficienten der Potenz m des Polynomiums $a + bx + cx^2 \ldots$ ist keine andere, als die vorlängst von mir bekannt gemachte Lokalformel; die Fundamentalformel (wie ich sie Arch. der Math. H. II. S. 250 neune) für das allgemeine Glied dieses Problems, worinn ich einen Lehrsatz aufgestellt habe, der den ganzen Inhalt dieses Gliedes (oder Coefficientens desselben) jener Potenz, und was darinn von andern Potenzen vorkommt, sehr deutlich und genau angiebt. Die Identität beider Formeln habe ich in der Note k (zu S. 12 — 14) umständlich dargethan.

153. Hier folgt der Aufschluß dieses so auffallenden ganz sonderbaren Phänomens. Die Lokalformel für Potenzen von der hier (152) die Rede ist, kommt zuerst (*Infin. Dignit. p.* 71) in einer sehr unvollkommenen Zeichnung, vor, und die zugehörige, ihr gleichgültige, combinatorische, steht weit von ihr getrennt (S. 133, 2) *). Im Nov. Syst. Perm. verhält sich das

*) Das kann einer Schrift über einen ganz neuen Gegenstand nicht zum Vorwurfe gereichen, bey welcher, selbst während des Abdrucks derselben, neue Ideen an die alten sich anreihten, wo also vieles nicht, wie es sollte, ganz deutlich ausgedrückt, gezeichnet, geordnet, erwiesen, vorkommt; einer Schrift, deren Verfasser die darinn aufgeführte Methode lange Zeit für eine specielle, nur auf das Polynomialproblem sich beschränkende, ansahe,

ganz anders. Da stehen (S. LI, 5) die oben (138) angeführten einfachsten Vergleichungen der lokal- und combinatorischen Zeichen für Potenzen voran; auf diese folgt (Exempel I.) jene allgemeine Lokalformel des unbestimmten $(n+1)$ten Gliedes der $m$ten Polynomialpotenz und gleich darauf (S. LII) die zugehörige combinatorische Formel für einen bestimmten Werth von n angewendet, und noch oben drein, zu mehrerer Deutlichkeit, in die gewöhnliche algebraische Sprache übersetzt. Eben so stehen (Ebend. S. LIV, 7, 8) die combinatorischen Formeln für ganze positive, und jede andere Exponenten der Potenzen, unmittelbar neben einander, welche in den *Infin. Dign.* ebenfalls getrennt (p. 98, 7, 8 und 113, 2) vorkommen. Nach dem Novo Systemate kann man also die so wichtige Relation der lokal- und combinatorischen Formeln überhaupt (für Potenzen, so wie für Produkte [Ebendas. p. LI — LIV] wovon aber hier an dieser Stelle die Rede nicht ist) gar nicht verfehlen; und folglich auch nicht die, der beiden Hauptformeln für Potenzen (S. 13. Note k)

$$(a+q)^m \varkappa n = {}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1}\, q^1 \varkappa(n-1) + {}^m\mathfrak{B}\, a^{m-2}\, q^2 \varkappa(n-2) + \&c$$

$$q\{b\ c\ d\ e\ f \ldots]$$

$$(a+q)^m \varkappa n = {}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1}\, \mathfrak{a}^{n-1} A + {}^m\mathfrak{B}\, a^{m-2}\, \mathfrak{b}^{n-1} B + \&c$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ b & c & d & e & \ldots \end{pmatrix}$$

wo jene Lokalformel den Inhalt, die letztere hingegen die combinatorische Ausführung desselben, für

und nur erst späterhin, da sie beynahe ganz abgedruckt war, gewahr wurde, es lasse sich von der Combinationsmethode eine ganz allgemeine Anwendung auf die Analysis machen (5); einer Schrift endlich, die zwar als die erste, in welcher die Bahn gebrochen worden, ihren historischen Werth hat, die man aber gar nicht als Muster der Combinationsmethode oder der combinatorisch-analytischen Darstellung empfiehlt (Toepf. comb. Anal. 189, 190).

die Scale der ersten und den Zeiger der letzten nachweiset. Diese Verbindung und Beziehung beyderley Formeln auf einander gehört wesentlich zu meiner Combinationsmethode. Die anschaulichste Darstellung davon findet man in meinem Programm: Ad Serierum Reverſ. Paralipomena. Daselbst (p. XVIII. nota i) wird auch von der Scale ausführlich gehandelt.

Die eben bemerkte große Kluft, die sich in der ersten Schrift (*Infin. Dign.*) zwischen diesen beiden Formeln befindet, so wie der Umstand, daß in derselben die Zusammensetzung der Elemente in der Folge immer sogleich nach Complexionen der Combinationsclassen unmittelbar vorgenommen wird, ist unstreitig Ursache gewesen, daß Herrn Etatsr. Tetens (der sich, wie gesagt, blos an die *Infin. Dign.* scheint gehalten zu haben) jene Lokalformel, mit ihrer Bedeutung, ganz aus den Gedanken gekommen ist. Der Wunsch, die Leichtigkeit der combinatorischen Methode bey dem Polynomialprobleme, auf einem andern Wege, wenn es möglich wäre, zu erreichen, ohne erst ganz neue und bis dahin unbekannte Operationen lernen und anwenden zu müssen, führte ihn späterhin auf eine, wie sie (S. 3) genannt wird, blos analytische Formel (S. 13), (in welche nehmlich analytische Substitutionen von längst bekannter Art zu machen sind) die vollkommen aus denselben Elementen, in eben der Ordnung, wie meine obige Lokalformel zusammengesetzt, und also, bis auf die Zeichnung, ganz die meinige ist.

154. Nicht also die Grundformel, sondern nur die Art sie anzuwenden, ist bey beiden Verfahren verschieden. Ich setze die Elemente nach der obigen zweyten Formel (153) combinatorisch zusammen; Herr Tetens bedient sich gewöhnlicher Substitutionen in die erste. In der Formel nehmlich (S. 13) ist der erste Theil des gesuchten

Coefficientens unmittelbar gegeben und völlig entwickelt, der zweyte Theil aber läßt sich leicht bestimmen. Die weitere Entwickelung hingegen der unentwickelten übrigen Theile geschieht nach derselben allgemeinen Formel, durch bloße fortgesetzte Substitutionen, die auf die nehmliche Art, zufolge der Formel betrieben werden (S. 14, 15, Anm. 1-3). Man sehe die Exempel (S. 15, 16; 19—21). Beide Verfahren sind, dem Aeußerlichen nach, himmelweit verschieden, so, daß man es nicht glauben würde, wenn es nicht der Augenschein lehrte, daß beide von einer und derselben Formel (153) ausgehen. Man würde sich inzwischen sehr irren, wenn man, eben dieser Verschiedenheit wegen, voraussetzen wollte, das Substitutionsverfahren sey mir unbekannt geblieben. Es hängt ganz von der (Nov. Syst. Perm. p. LV, 9, 10 und hier 141, 142) aufgeführten Relation und Zerlegung der höhern Combinationsclassen in Summen von niedrigern ab; und jene Entwickelung der Glieder durch Substitution ist nur eine fortgesetzte mehrmals wiederholte Anwendung derselben; womit auch (S. 15, Anm. 3) übereinstimmt.

Ich sage hiermit nicht, Herr Etatsrath Tetens habe seine Substitutionsmethode von dieser Relation abgeleitet. Keinesweges! Ich bin vielmehr überzeugt, die Formel dafür (die nur im Novo Syst. nicht aber in den Infin. Dign. stehet) sey ihm gänzlich unbekannt geblieben. Die Formel und ihre Auflösung durch Substitution haben sich vermuthlich auf einem und denselben Wege bey ihm eingefunden.

155. Die Frage, die nun zunächst entsteht, ob das Substitutionsverfahren oder die Combinationsmethode, bey Auflösung des Polynomialproblems kürzer und leichter, also vorzüglicher, sey, kann nicht besser, als durch unmittelbare Nebeneinanderstellung entschieden werden. Hier ist also der Ort, die (S. 19. Note m) versprochene Vergleichung beider aufzustellen.

Ich will dazu das (S. 19, 20) entwickelte Beyspiel wählen, das ausführlichste von mehreren die (S. 15—20) sind beygebracht worden.

156. Aufgabe. Es ist die Reihe

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 \ldots + kx^9 = p$$

gegeben; man verlangt den zwölften Coefficienten der vierten Potenz dieser Reihe (S. 19).

157. I. Auflösung. Nach Herrn Tetens Substitutionsverfahren

(α) Wie selbiges, nach dem Werthe der dortigen Formel $T(a + + |n|)^4$ (S. 19 — 21) gegeben wird.

Die dort nachzulesende, nach den vorhergehenden Vorschriften behandelte Auflösung, beruht auf folgenden drey Punkten:

1) Des allgemeinen Coefficientens (S. 13) erster Theil $m a^{m-1} |n|$ (hier $4 a^3 . o$) ist, wie immer, unmittelbar und völlig entwickelt gegeben (S. 14. 9. Anm. 1).

2) Der zweyte Theil $\frac{m . m - 1}{1 . 2} a^{m-2} T(b + + |n-1|)^2$ (hier $\frac{4 . 3}{1 . 2} a^2 [b . o + \ldots$ S. 20] hat nach (S. 9, 5. Satz 2) auch nicht die geringste Schwierigkeit, und kann sogleich geschafft werden.

(Daher auch die Numern 1) 2) (S. 19) unten sogleich entwickelt dargestellt werden.)

3) Die übrigen noch unentwickelten Theile werden eben so, nach der Formel durch Substitution, behandelt (S. 15. Anm 3). Die beiden ersten Theile aus jeder neuen Substitution lassen sich, wie die anfänglichen (1, 2)

sogleich übersehen; und so wird mit Substitutionen fortgefahren, bis alles in solchen ersten Theilen ausgedrückt, und dadurch gegeben ist.

Bey dem Verfahren selbst beobachtet man folgende Ordnung. Zuerst entwirft man die Substitutionen in Formeln (S. 19, 20) um sich, besonders wenn deren eine große Menge ist, nicht dabey zu versehen, weil hier nicht selten Substitutionen in Substitutionen vorkommen (S. 4. 20). Dann nimmt man die Werthe der Theile, die sich übersehen lassen (1, 2; die andern sind nehmlich schon weiter zerlegt) für den gesuchten Coefficienten in eine Summe zusammen (S. 20, 21).

(β) Wie selbiges, in combinatorischen Zeichen ausgedrückt, anschaulich sich darstellen läßt.

Der Ausdruck (141. S. 236)

$$p^m \varkappa (n+1) = m^{n+m} \mathfrak{M} = {}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1}\, a^n A + \&c$$

giebt, für $m = 4$ und $n = 11$, den gesuchten Coefficienten (156) $p^4 \varkappa\, 12 = \mathfrak{d}^{15} D$, und (Ebend. oder auch (143)

$$\mathfrak{d}^{15} D = {}^4\mathfrak{A}\, a^3\, a^{11} A + {}^4\mathfrak{B}\, a^2 b^{11} B + {}^4\mathfrak{C}\, a^1 c^{11} C + {}^4\mathfrak{D}\, a^0 \mathfrak{d}^{11} D$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots \\ a & b & c & \ldots \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ b & c & d & e & \ldots \end{pmatrix}$$

Hieraus folgt, wenn man nur die beiden ersten Glieder (in denen blos die Classen ^{11}A und ^{11}B, aber keine höheren vorkommen) beybehält, die übrigen aber (die höhere Classen ^{11}C, ^{11}D enthalten) durch fortgesetzte Substitutionen immerfort weiter zerlegt, die Zeiger, der Deutlichkeit wegen, beyschreibt, und die Binomialcoefficienten, der Kürze halber, beybehält;

$p^4 \varkappa\, 12$ oder $\mathfrak{d}^{15} D$

das ist

$$ {}^4\mathfrak{A}a^3 . a^{11}A + {}^4\mathfrak{B}a^2 . b^{11}B $$
$$ \binom{1\ 2 \ldots\ldots 10\ 11}{b\ c \ldots\ldots\ l\ m} $$
$$ + {}^4\mathfrak{C}a^1 \Big[{}^3\mathfrak{A}b^2 . a^8A + {}^3\mathfrak{B}b^1 . b^8B $$
$$ \binom{1\ 2 \ldots\ldots 7\ 8}{c\ d \ldots\ldots i\ k} $$
$$ {}^3\mathfrak{C}a^0 \Big[{}^3\mathfrak{A}c^2 . a^5A + {}^3\mathfrak{B}c^1 . b^5B $$
$$ \binom{1\ 2\ 3\ 4\ 5}{d\ e\ f\ g\ h} $$
$$ {}^3\mathfrak{C}c^0 \big[{}^3\mathfrak{A}d^2 . a^2A + {}^3\mathfrak{B}d^1 . b^2B $$
$$ \binom{1\ 2\ 3}{e\ f\ g} \Big] $$

$$ + {}^4\mathfrak{D}a^0 \Big[{}^4\mathfrak{A}b^3 . a^7A + {}^4\mathfrak{B}b^2 . b^7B $$
$$ \binom{1\ 2 \ldots 6\ 7}{c\ d \ldots h\ i} $$
$$ {}^4\mathfrak{C}b^1 [{}^3\mathfrak{A}c^2 . a^4A + {}^3\mathfrak{B}c^1 . b^4B + {}^3\mathfrak{C}c^0 . c^4C] $$
$$ \binom{1\ 2\ 3\ 4}{d\ e\ f\ g} $$
$$ {}^4\mathfrak{D}b^0 [{}^4\mathfrak{A}c^3 . a^3A + {}^4\mathfrak{B}c^2 . b^3B + {}^4\mathfrak{C}c^1 . c^3C $$
$$ \binom{1\ 2\ 3}{d\ e\ f} \Big] $$

Hier sind nehmlich die ersten beiden Glieder von $p^4 \varkappa 12$ oder $b^{15}D$, worinn die Classen ^{11}A und ^{11}B vorkommen, vorangesetzt; die übrigen Classen ^{11}C und ^{11}D werden durch Substitutionen weiter zerlegt, die hier in den Klammern, neben $^4\mathfrak{C}a^1$ und $^4\mathfrak{D}a^0$ befindlich sind. Die Zerlegungsformel bleibt immer dieselbe (141, 142).

Unter den beiden letztern Substitutionen kommen gleichwohl hier noch zwey höhere Classen ^4C und ^3C vor, weil sich nehmlich ihre Werthe d^2e und d^3, sogleich an diesem Orte, übersehen lassen.

Daraus entwickelt man den gesuchten Coefficienten (156)

$$4a^3m + 6a^2(2bl + 2ck + 2di + 2eh + 2fg)$$

$$+ {}^4\mathfrak{C}a^2 \left[\begin{array}{l} 3b^2k + 3b(2ci + 2dh + 2eg + 1f^2 \\ + 3c^2h + 3c(2dg + 2ef) \\ + 3d^2f + 3de^2 \end{array} \right]$$

$$+ {}^4\mathfrak{D}a^0 \left[\begin{array}{l} 4b^3i + 6b^2(2ch + 2dg + 2ef) \\ + 4b^1(3c^2g + 3c^1[2df + 1e^2] + 3d^2e) \\ + 4c^3f + 6c^2 . 2de + 4c^1d^3 \end{array} \right]$$

Alles vollkommen eben so und in eben der Ordnung, wie bey Herrn Tetens (S. 20, 21); wenn man hier $m = l = o$ setzt.

Ich darf hoffen, was hier (in α und β) gesagt worden ist, vornehmlich aber die so eben vorgelegte anschauliche Darstellung, werde vieles dazu beytragen, Herrn Tetens Substitutionsmethode in der Kürze zu übersehen.

Das Wesentliche des Verfahrens, auf combinatorische Vorstellungen und Zeichen, wie hier gebracht, besteht, in meiner Sprache ausgedrückt, in Folgendem:

Es werden nehmlich durchgängig die dritten, vierten u. s. w. alle folgenden höhern Classen mit den Versetzungszahlen ihrer einzelnen Complexionen, d. i. c^nC, d^nD, e^nE ... vermittelst der Relationen (*Nov. Syst. Perm.* p. LV, 9, 10 oder hier 141, 142) in Classen von niedrigern Summen, und diese, von der dritten an, weiter in Classen von niedrigern Summen, u. s. f. zerlegt, und von diesen nur immer die beiden ersten Classen beybehalten; und so ferner mit der Zerlegung (oder Substitution nach Herrn Tetens) fortgefahren, bis alles durch erste Classen ^mA, ^mB gegeben ist.

Es wird darum alles von Hrn. Tetens auf erste Classen reducirt, weil er dieser beiden Classen Werthe sogleich übersehen (S. 14, 9) und darstellen (S. 9. Satz 2) kann;

Ließen sich nach ihm auch die dritten Classen ^{m}C so leicht übersehen, ohne sie erst zu zerlegen, so könnte man die für sie nöthige Substitution, wie für die beiden ersten, ersparen

Eben so würde, wenn sich auch die vierten Classen ohne Zerlegung übersehen ließen, die dafür nöthige Substitution erspart werden; und so auch bey den übrigen höhern Classen. Und dabey wäre in manchen Fällen keine geringe Ersparnis.

Die Zerlegungen durch Substitutionen werden nehmlich um so zahlreicher, je größer einestheils die Zahl (n) des gesuchten Coefficientens $p^{m} \varkappa (n+1)$ und anderntheils der Exponent (m) der Potenz ist; das letztere aber nur bis dahin, wo $m = n - 1$ (S. 18. Anm. 5; S. 21. Anm. 6).

Ein solches Ersparnis der Zerlegungen und Substitutionen giebt nun meine Combinationsmethode, nach welcher die einzelnen Complexionen der Classen besonders gesucht, und die zugehörigen Versetzungszahlen (Polynomialcoefficienten) hinterher bestimmt werden; beides nach äusserst leichten Regeln und Formeln. Die Anwendung derselben auf die Aufgabe (156) ist, wie folget:

II. Auflösung. Nach der Hindenburgischen Combinationsmethode

Auch hier ist, für $n+1=12$, oder $n=11$ und $m=4$

$$p^{4} \varkappa 12 = b^{15}D \text{ d. i. } (141, 142)$$

$$ {}^4\mathfrak{A}a^3 . a^{11}A + {}^4\mathfrak{B}a^2 . b^{11}B + {}^4\mathfrak{C}a^1 . c^{11}C + {}^4\mathfrak{D}a^0 . d^{11}D $$

$$ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots\ldots & 9 & 10 & 11 \\ b & c & d & \ldots\ldots & k & l & m \end{pmatrix} $$

Das giebt, die Complexionen der Classen gehörig entwickelt, und mit den Versetzungszahlen versehen, auch die Binomialcoefficienten, der Kürze wegen, beybehalten:

${}^4\mathfrak{A}a^3 . 1m$	$+ {}^4\mathfrak{B}a^2$	$+ {}^4\mathfrak{C}a^1$	$+ {}^4\mathfrak{D}a^0$
	2bl	$3b^2k$	$4b^3i$
	2ck	6bci	$12b^2ch$
	2di	6bdh	$12b^2dg$
	2eh	6beg	$12b^2ef$
	2fg	$3bf^2$	$12bc^2g$
		$3c^2h$	24bcdf
		6cdg	$12bce^2$
		6cef	$12bd^2e$
		$3d^2f$	$4c^3f$
		$3de^2$	$12c^2de$
			$4cd^3$

Alles, wie (in I, β) und bey Herrn Tetens (S. 20, 21) wenn man auch hier, wie dort, $m = l = 0$ setzt.

Die Darstellung der bloßen Complexionen (ohne Binomial- und Polynomialcoefficienten) ist hier für ${}^{15}D$, wie (S. 191) für ${}^{15}E$. Die Ordnung des Verfahrens, nach welchem man den gesuchten Coefficienten bestimmt, ist folgende:

1) Man suche die einzelnen Complexionen der Classen ${}^{11}A$, ${}^{11}B$, ${}^{11}C$, ${}^{11}D$, nach (42), indem man hier ${}^{11}A = m$ setzt, und die Classen, mit ihren Ordnungen nach einander ableitet. Hier ist die Ordnung b die erste (wie in 42 die Ordnung a) weil der Zeiger hier, nicht mit a sondern mit b anfängt.

2) Jeder einzelnen Complexion schreibe man die zugehörige Versetzungszahl oder den Polynomialcoefficienten vor (*Infin. Dign. p.* 31, 32; hier S. 65 und 102, 1, 2).

3) Jeder einzelnen Classe setze man die Polynomialcoefficienten und Potenzen von a vor, wie sie in obiger Formel neben $a^{11}A$, $b^{11}B$, $c^{11}C$, $b^{11}D$ stehen.

Man hätte die Anordnung der Complexionen für ${}^{15}D$ hier auch so treffen können, wie sie (in 55 S. 192) stehen.

Auch hätte man hier die Complexionen der Classen ${}^{11}A$, ${}^{11}B$, ${}^{11}C$, ${}^{11}D$ für die Elemente b, c, d, e ... aus der Involution (68. S. 204) sogleich abschreiben können; wenn man dafür $n = 11$, und nach diesem Werthe die Complexionen der Diagonalfächer rechter Hand niederwärts, durch m und l und k und i, mit den ihnen zugehörigen Potenzen von b verbunden, genommen hätte (71).

158. Das wäre also die (Note m, S. 19) versprochene unmittelbare Vergleichung beider Verfahren gegeneinander. Die größere Leichtigkeit in der Entwickelung, die mehrere Kürze in der Darstellung, welche die Combinationsmethode hier offenbar zeigt, beruhet auf Folgendem; woraus die Vorzüge des Combinirens anstatt des Substituirens noch deutlicher erhellen werden.

1) Werden dabey die successiven Substitutionen vermieden, die, so leicht sie auch an sich sind, dennoch wegen der Menge in Verwickelung führen, wobey man dann aufmerken muß, nichts zu übersehen.

2) Das Combiniren der Elemente für die höhern Classen ${}^{m}C$, ${}^{m}D$, ${}^{m}E$... welches hier statt des Substituirens gesetzt und gebraucht wird, ist äußerst leicht, und besteht

blos im Vorschreiben und Umtauschen der nächsten Elemente (42).

Was Herr Hofrath Kästner, beym Rechnen mit Zahlen, durch die gewöhnlichen Ziffern, geschrieben, rühmt, daß man während der Arbeit an den Werth der einzelnen Ziffern zu denken nicht nöthig habe (Anfgr. der Arithm. I. 41. Anm.); eben so was gilt auch hier beym Combiniren, wo man an die Substitutionen, für die es gebraucht wird, und ob man sie alle habe, gar nicht denken darf.

3) Das Substitutionsverfahren giebt zwar, mit den Complexionen zugleich die zugehörigen Versetzungszahlen oder Polynomialcoefficienten; allein, die Bestimmung der Versetzungszahlen zu gegebenen Complexionen, ist sehr leicht, sie können sogar, wenn man will, aus *Infin. Dign.* p. 168, 169 (selbst, wenn die Complexion aus zehn Buchstaben bestünde) genommen werden, und mehrere Complexionen haben eine und dieselbe Versetzungszahl. Man kann daher, ehe man noch mit dem ersten Entwurfe wegen der Substitutionen (S. 251, α), um die Theile des gesuchten Coefficienten daraus herzuleiten, fertig ist, bereits alle Complexionen, mit allen Versetzungszahlen gefunden haben. Und so zeigt sich auch hier die Nützlichkeit der Vorschrift, die ungleichartigen Elemente (wie hier die Complexionen und ihre Versetzungszahlen) nicht in Verbindung mit einander, sondern ihre Gesetze getrennt und einzeln zu suchen (4. S. 156, 157).

4) Die Combinationsmethode bringt, wie auch die Darstellung (S. 255) augenscheinlich zeigt, die Bestandtheile des gesuchten Coefficientens sogleich gut geordnet zusammen, dergestalt, daß jedes Ding, während der Entwickelung selbst, die ihm zugehörige Stelle unter den übrigen einnimmt. Hier ist also kein Zusammenlesen der einzelnen zerstreuten Theile (wie beym Substitutionsverfah-

ren (S. 20, 21) aus dem was vorher (S. 20) ist gefunden worden, nöthig. Die Combinationsmethode giebt übrigens die Theile der gesuchten Coefficienten in der Ordnung und Lage, wie das Substitutionsverfahren.

Das wird hoffentlich die Anmerkungen f und l (zu S. 4 und 17) hinlänglich rechtfertigen. Das hier (in 1 und 2) Beygebrachte bewährt die Leichtigkeit; das (in 3 und 4) Gesagte, die Kürze des combinatorischen Verfahrens.

189. Je verwickelter eine Aufgabe, theils durch mehrere Größen und die Menge ihrer Theile, die dabey vorkommen; theils durch mehrere zusammengesetzte, mit diesen Größen vorzunehmende, Operationen ist, desto wirksamer und thätiger ist die Combinationsmethode. Ich berufe mich hier auf die combinatorische Darstellung des sehr zusammengesetzten Lehrsatzes in (143) und seines sehr kurzen Beweises in (144). Man wird dadurch, so wie durch das hier zunächst aufzuführende Beyspiel, meine bey Herrn Tetens Satze gemachte Bemerkungen (Note q und r, S. 35 und 40) vollkommen bestätiget finden. Es kann gewiß kein anderes Verfahren die so große Mannichfaltigkeit der vorkommenden einfachen und zusammengesetzten Größen, wie und mit welcher Auswahl, mit einander verbunden, sie das Gesuchte bestimmen, verständlicher und faßlicher zusammenordnen, als das combinatorische! Zu den häufigen, bey andern Gelegenheiten bereits vorgelegten Beyspielen dieser Art, will ich noch das folgende hier beyfügen.

190. Aufgabe und Exempel (zu 143, II und 146). Es sey gegeben:

$$p = \alpha x^{\mu} + \beta x^{\mu+1}$$

$$q = f^{\nu} x^{\nu} + {}^{\nu}\mathfrak{A} f^{\nu-1} g x^{\nu+1} + {}^{\nu}\mathfrak{B} f^{\nu-2} g^2 x^{\nu+2} + \&c$$

$$r = x^{\pi} + \frac{x^{\pi+1}}{1} + \frac{x^{\pi+2}}{1.2} + \frac{x^{\pi+3}}{1.2.3} + \&c$$

Man suche den Werth von $(r^c q^b p^a) \varkappa 3$, in Coefficienten der einzelnen Potenzen p^a, q^b, r^c ausgedrückt.

Auflösung. Sie ist (nach 146)

$$(r^c q^b p^a) \varkappa 3 = {}^{5}C^{r^c q^b p^a}$$

und so kommen dafür die dortigen Factoren (wo aber für das letzte Produkt, wegen eines Druckfehlers, $r^c \varkappa 3$ $q^b \varkappa 1$ $p^a \varkappa 1$ zu setzen ist).

Nun geben die obigen Reihen

$p^a \varkappa 1 = \alpha^a$	$q^b \varkappa 1 = f^{\nu b}$	$r^c \varkappa 1 = 1$
$p^a \varkappa 2 = {}^{a}\mathfrak{A}\, \alpha^{a-1}\beta$	$q^b \varkappa 2 = {}^{\nu b}\mathfrak{A} f^{\nu b-1} g$	$r^c \varkappa 2 = \frac{c}{1}$
$p^a \varkappa 3 = {}^{a}\mathfrak{B}\, \alpha^{a-2}\beta^2$	$q^b \varkappa 3 = {}^{\nu b}\mathfrak{B} f^{\nu b-2} g^2$	$r^c \varkappa 3 = \frac{c^2}{1.2}$

und diese, wie in (146) zusammengesetzt, den gesuchten Werth von $r^c q^b p^a$, das ist (die factores communes nach q genommen)

$$f^{\nu b}\left[\alpha^a . \frac{c^2}{1.2} + {}^{a}\mathfrak{A}\, \alpha^{a-1}\beta . \frac{c}{1} + {}^{a}\mathfrak{B}\, \alpha^{a-2}\beta^2\right]$$

$$+ {}^{\nu b}\mathfrak{A} f^{\nu b-1} g \left[\alpha^a . \frac{c}{1} + {}^{a}\mathfrak{A}\, \alpha^{a-1}\beta\right]$$

$$+ {}^{\nu b}\mathfrak{B} f^{\nu b-2} g^2 . \alpha^a$$

Für das dritte Glied also, oder für $(r^c q^b p^a) \, 7\, 3$ dürfte man nur das hier Gefundene als Coefficient zu $x^{a\mu+b\nu+c\pi+2}$ setzen (Arch. der Math. H. II. S. 225, II). Für $\mu = \nu = \pi = 0$, wie in den Reihen (118 und 143) käme dafür, x^2

191. Nach dem Lehrsatze (143) werden die Produkte aus mehrern Potenzen von Reihen auf Produkte von mehrern Gliedern oder Coefficienten der einzelnen Potenzen reducirt, so, daß diese Glieder oder Coefficienten immer ganz als Factoren darinn vorkommen. Diese Reduktion ist wichtig; denn wenn die $p^a \varkappa (n+1)$, die $q^b \varkappa (r+1)$ u. s. w. wegen der besondern Beschaffenheit der Coefficienten der Reihen p, q... sich kürzer, als auf dem gewöhnlichen Wege (124, 129) ausdrücken lassen, oder, wenn man ihre Werthe schon anderswoher weis, ohne sie erst suchen zu dürfen; dahin z. B. die im obigen Exempel (S. 259) absichtlich gewählten Reihen p, q, r gehören (wegen der Reihe r sehe man Eul. Intr. in Anal. Infin. T. I. §. 116, 117): so kann man diese Ausdrücke oder Werthe sogleich an Ort und Stelle setzen und gebrauchen, und verhütet dadurch weitläuftigere und verwickeltere Formen, auf die man sonst verfällt, und deren Reduktion auf die gleichgültigen einfachern nicht immer leicht ist. Bemerkungen über diesen wichtigen Umstand, nebst Beyspielen, enthalten: Rothe, de Ser. Reverſ. demonstr. p. 13—15; meine Paralip. ad Ser. Reverſ. p. VII. III, α, β; Toepf. Combin. Anal. S. 175-180.

Wollte man die Aufgabe (190) nach Herrn Tetens 6ten Satze (S. 34, 35) lösen, so müßte man ihn erst von zwey Potenzreihen P^m, Q^h auf drey erstrecken, welches nicht so unmittelbar, wie bey meinem Lehrsatze (143) geschehen kann, wo man wegen der hinzukommenden dritten Potenz R^s nur die zweyte Variationsclasse ${}^{n+2}B$ in die dritte ${}^{n+3}C$ umwandeln darf; auch kommen (S. 35) außer denen von a anfangenden terminis generalibus, noch andere (also nicht überall Glieder von Potenzen der unverkürzten Reihen, wie bey mir) vor. Dieses, und das dabey vorzunehmende Substitutionsverfahren, macht offenbar die Auflösung weitläuftiger, als wenn solche

nach der Combinationsmethode (143) vorgenommen wird. Wer das aus dem hier Gesagten noch nicht deutlich übersieht, darf, zur Vergleichung, das obige Exempel (190. S. 259) nur nach der Substitutionsformel berechnen.

192. Für die Fälle, wo Sprünge in den Exponenten der einzelnen Reihenglieder vorkommen, wird (S. 24—26) erinnert, man dürfe nur die Coefficienten der fehlenden Glieder o gleichsetzen, und bey dem Substitutionsverfahren darauf Rücksicht nehmen. Das ist freylich der gewöhnliche Gang, den man auch sonst häufig befolgt, der aber zuweilen auf große Weitläuftigkeit führt, wie ich in meinem Programm (Paralip. ad Ser. Reverſ. p. XV, XVI, Schol. I und II) an zwey Beyspielen ausführlich gezeigt habe. Nämlich, wenn die Zahlen im Zeiger nicht nach der Ordnung, sondern sprungweise fortgehen, da giebt die Combinationsmethode kürzere und bequemere Auflösungen, wie ich an dem (S. 25, 26) an- und ausgeführten Exempel, in der dortigen Note o, gezeigt habe. Vorzüglich ist hierzu die Boscovichische Darstellung der Complexionen (Arch. der Math. H. IV. S. 409, 30) bequem; wie Boscovich (Giornale de' Letterati di Roma v. J. 1748. p. 86, 87) selbst erinnert hat. Gesetzt, man sollte, für seine dortige Reihe $p^m = (az^s + bz^{s+r} = cz^{s+2r} + \&c)^m$ den Coefficienten zu z^{ms+20r}, aber für den Zeiger $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 10 \\ b & h & l \end{pmatrix}$ schaffen, so erforderte das alle Complexionen zur Summe 20 aus den Zahlen 1, 7, 10, und diese sind nach Boscovich's (im Arch. der Math. S. 410 angeführten) Darstellung keine andern, als folgende:

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

7 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

7 7 1 1 1 1 1 1

10 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

10 7 1 1 1

10 10

wie man auch sogleich übersieht, ohne selbst die Boscovichische Regel zu kennen, die diese Zahlen- und dadurch auch die zugehörigen Buchstabencomplexionen, ohne Anstoß giebt. Dadurch findet man, durch gehöriges (von der Anzahl der Factoren in den einzelnen Complexionen allein abhängiges [Arch. d. Math. S. 389, 7 und S. 397]) Vorschreiben der Binomial- und Polynomialcoefficienten und der Potenzen von a (nach Arch. der Math. S. 414, 37) den gesuchten Coefficienten zu z^{ms+20r}, oder

$$\mathfrak{p}^m \, \mathfrak{x} \, 21 = \left\{ \begin{array}{l} {}^m\mathfrak{U}\,\mathfrak{u}\; a^{m-20} b^{20} + {}^m\mathfrak{O}\,\mathfrak{o}\; a^{m-14} b^{13} h \\ + {}^m\mathfrak{H}\,\mathfrak{h}\; a^{m-8} b^6 h^2 + {}^m\mathfrak{L}\,\mathfrak{l}\; a^{m-11} b^{10} l \\ + {}^m\mathfrak{E}\,\mathfrak{e}\; a^{m-5} b^3 hl + {}^m\mathfrak{B}\,\mathfrak{b}\; a^{m-2} l^2 \end{array} \right\}$$

Die Buchstabencomplexionen sind hier aus jenen Zahlencomplexionen rückwärts geschrieben, also gut geordnet. Ich habe auch die Zeichen der Moivrischen Unzen, wie ich sie nenne, ${}^m\mathfrak{U}\mathfrak{u}$, ${}^m\mathfrak{O}\mathfrak{o}$ ... ${}^m\mathfrak{E}\mathfrak{e}$, ${}^m\mathfrak{B}\mathfrak{b}$ beybehalten, theils der Kürze wegen, theils aber auch, weil die Bestimmung ihrer Werthe für jede Complexion nicht die geringste Schwierigkeit hat (Ebendas. S. 388, 4 und die dortigen Exempel). Hierher gehört auch Herrn D. Kramps Behandlung des Beyspiels (hier S. 103, 6) und meine Anmerkung dazu (S. 118—120, §. 3—6). Das Verfahren nach der Substitutionsmethode würde bey weitem nicht so kurz ausfallen.

193. Für die Potenz $(a + b + c + d + \&c)^m$ werden (S. 42, 44) die mit a^{m-1}, a^{m-2}, a^{m-3}, zu verbindenden Complexionen aus b, c, d, e ... nach ihrer anfänglichen Entwickelung angegeben, und (S. 42) sich darauf berufen, daß daraus das Gesetz des Fortgangs deutlich erhelle. Das dürfte wohl auf den Fortgang der abgebrochen dargestellten Theile passen; schwerlich aber würde man daraus zugleich das Fortgangsgesetz für die zu a^{m-4}, a^{m-5} u. s. w. gehörigen Complexionen übersehen, ohne sie erst aufzusuchen. Hier sind nun wieder, die dort in der Note t angezeigten combinatorischen Verfahren, Formeln, allgemeinen Glieder, Tafeln, die unabänderliche Richtschnur, nach welcher die Größen, so wie man sie braucht, dargestellt werden. Ueberhaupt sind die combinatorischen Formeln (die sich gewöhnlich auf sehr einfache Gesetze beziehen) vorzüglich bequem, durch ihre kurzen bedeutungsvollen symbolischen Nachweisungen, den minder bequemen, oft hier und da zerstreut vorkommenden wörtlichen Verordnungen, von denen auch das Substitutionsverfahren nicht frey ist (Note q S. 35, 36) abzuhelfen, die man doch zuvor kennen muß, wenn man die Formel gehörig gebrauchen will. Und nun noch einige Bemerkungen überhaupt.

194. Der Ausdruck $p^m \varkappa (n+1) = \mathfrak{m}^{n+m}\mathfrak{N}$ (138) setzt überhaupt ein Verfahren voraus, die mte Classe der Complexionen zur Summe n+m, für einen angegebenen Zeiger, zu finden. Es seyen, für einen bestimmten Fall $n = 6$; $m = 4$ und die Zahlenelemente 1, 2, 3, 4 ... so ist dafür $p^4 \varkappa 7 = b^{10}D$. Es giebt mehrere Arten die Complexionen für ${}^{10}D$ zu finden, z. B.

(α)	(β)	(γ)
1 1 1 7	1 1 1 7	3 3 2 2
1 1 2 6	1 1 2 6	3 3 3 1
1 1 3 5	1 1 3 5	4 2 2 2
1 1 4 4	1 2 2 5	4 3 2 1
1 2 2 5	1 1 4 4	4 4 1 1
1 2 3 4	1 2 3 4	5 2 2 1
1 3 3 3	2 2 2 4	5 3 1 1
2 2 2 4	1 3 3 3	6 2 1 1
2 2 3 3	2 2 3 3	7 1 1 1

und andere; wo die Complexionen in (α) wie wachsende Zahlen, die in (β) nach fallenden Endelementen, die in (γ) in directer lexikographischer Ordnung, fortgehen. Es hat keine Schwierigkeit, die Abhängigkeit dieser so verschiedenen Formen sogleich zu übersehen; und so kann man, eine wie die andere, für ^{10}D gebrauchen. Inzwischen ist bereits festgesetzt worden — so lange nichts anders erinnert wird — die Complexionen in (α) für ^{10}D zu nehmen, weil mehrere, in vieler Rücksicht nützliche Bedingungen sich bey ihnen zusammen vereinigen; denn 1) ihr Combinationsgesetz ist leicht; 2) sie sind sämtlich gut geordnet; 3) sie gehen wie wachsende Zahlen fort; 4) sie zeigen zugleich eine lexikographische Folge; 5) ihre Ordnungen fangen von 1 an, und gehen nach 2, 3 u. s. w. fort; 6) sie geben endlich eine Involution, wie die eingeschriebenen Winkel in (52, α) sogleich nachweisen. Es steht also Jedem frey, wie er die Complexionen von ^{10}D entwickeln will; aber eine leichte bequeme Regel das zu thun, muß gleichwohl (wie hier in 49, 50) angegeben werden.

195. Eben so kann man in dem allgemeinen Ausdrucke (139, 129)

$$p^m x(n+1) = m\mathfrak{A} a^{m-1} a^n A + m\mathfrak{B} a^{m-2} b^n B + m\mathfrak{C}^{m-3} c^n C \ldots$$

die Complexionen der Classen ${}^nA, {}^nB, {}^nC \ldots$ nach (194, α) oder, wie man sonst will, entwickeln. Aber die genauere Betrachtung dieser Formel zeigt noch etwas viel Wichtigeres. Es kommen nehmlich hier die Combinationsclassen ${}^nA, {}^nB, {}^nC, {}^nD \ldots$ nach der Ordnung vor, d. i. alle Complexionen zur Summe n, aus einem, zwey, drey, vier... Elementen geschrieben, mit ihren Versetzungszahlen a, b, c, d... und zwar sind

${}^m\mathfrak{A}$ und a^{m-1}	verbunden mit der	1sten	Classe	${}^nA$
${}^m\mathfrak{B}$ . . a^{m-2}	. . .	2ten	.	${}^nB$
${}^m\mathfrak{C}$. a^{m-3}	. . .	3ten	.	${}^nC$
u.	s.	w.	s.	

Daß also der Binomialcoefficient und die Potenzen von a von der Zahl der Classe, oder, welches einerley ist, von der Anzahl der Factoren in den einzelnen Complexionen abhängig sind.

Bezeichnet man nun überhaupt die Combinationscomplexionen mit Wiederholungen zur Summe n, nach allen Classen ${}^nA, {}^nB, {}^nC, {}^nD \ldots$ zusammen, allgemein durch ${}^n[C]$, wie auch nur die einzelnen Complexionen durch einander laufen mögen (welches auf das Entwickelungsgesetz dafür ankommt) wenn man sie nur alle hat: so kann man die obige Formel sehr verkürzt und sehr allgemein so ausdrucken:

$$p^m \varkappa (n+1) = ({}^m\mathfrak{A}^{*-1} a)\, a^{m-*}\, {}^n[C]$$
$$p(a\ b\ c\ d) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ b & c & d & e \end{pmatrix}$$

Der Werth des Zeichens * wird nehmlich hier durch die Anzahl der Factoren b, c, d, e... in den einzelnen Complexionen bestimmt, und

$$\text{für} \quad s = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \ \ldots$$

$$\text{wird}\ a^{m-s} = a^{m-1},\ a^{m-2},\ a^{m-3}\ \ a^{m-4}\ \ldots$$

$$\text{und}\ \overbrace{({}^{m}\mathfrak{A}\,a)}^{s-1} = {}^{m}\mathfrak{A}a,\ {}^{m}\mathfrak{B}b,\ {}^{m}\mathfrak{C}c,\ {}^{m}\mathfrak{D}d\ \ldots$$

Die Formel für den (n+1)ten Coefficienten der Potenz m, wie sie hier ausgedrückt ist, läßt unentschieden, nach welchem combinatorischen Gesetze man die Complexionen für $^{n}[C]$ (diesem Inbegriff sämtlicher Complexionen zur Summe n, aus allen Classen zusammengenommen) suchen, und ob das Gesetz involutorisch oder jedes andere seyn soll? Um nun involutorische Darstellungen von andern deutlich zu unterscheiden, darf man nur J oder $\mathfrak{J}$, statt jenem C mit der Klammer, setzen, und so ^{n}J für Involutionen nach Zahlenordnung die Complexionen rangirt, und $^{n}\mathfrak{J}$ in lexikographischer Folge, beide zur Summe n, gebrauchen; und so kommt, statt des vorigen Ausdruckes, nun

$$p^{m}\,x(n+1) = \overbrace{({}^{m}\mathfrak{A}\,a)}^{s-1}\ a^{m-s}\ \ {}^{n}\overset{s}{J}$$

$$p^{m}\,x(n+1) = \overbrace{({}^{m}\mathfrak{A}\,a)}^{s-1}\ a^{m-s}\ \ {}^{n}\overset{s}{\mathfrak{J}}$$

$$\begin{pmatrix} s & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ a & b & c & d & e & \ldots \end{pmatrix}$$

Hier kann man die Involutionen ^{n}J, $^{n}\mathfrak{J}$, wie man will entwickeln; doch wird man auf keinen Fall dafür etwas Besseres und Leichteres finden, als die Classeninvolution für ^{n}J, und die beiden lexikographischen für $^{n}\mathfrak{J}$ (nach 42, S. 183). Wenn man hier in den Formeln nach und nach 1, 2, 3, 4 . . . statt n setzt, so findet man dadurch alle Glieder von p^{m} in der Ordnung, wie sie auf das erste folgen, das für sich gegeben ist.

Von dieser ganz allgemeinen Darstellung des unbestimmten Gliedes der Potenzen der Reihen habe ich bereits (Arch. der Math. H. IV. S. 416—419) gehandelt. Hier bin ich von einem andern Standpunkte ausgegangen, wo man die Sache vielleicht noch geschwinder übersieht.

196. Die Bedeutung der Classen- und Lexikographischen Zeichen (in 195) giebt folgende Vergleichung:

$$\text{Es ist } {}^nJ = {}^nA + {}^nB + {}^nC + {}^nD \ldots + {}^n\mathcal{N} = {}^n\mathfrak{J}$$

$$\text{also } j^nJ = a^nA + b^nB + c^nC + d^nD \ldots + n^n\mathcal{N} = j^n\mathfrak{J}$$

$$(a\ b\ c\ d\ e) \qquad\qquad (a\ b\ c\ d\ e \ldots)$$

nehmlich j^nJ und $j^n\mathfrak{J}$ (wo das kleine lange deutsche Jot, nach der Analogie der andern kleinen deutschen Buchstaben a, b, c ... die Versetzungszahlen oder die Polynomialcoefficienten der einzelnen Complexionen der daneben stehenden Involutionen andeutet) drücken immer alle Classen a^nA, b^nB, c^nC ... mit ihren Versetzungszahlen a, b, c ... zusammen aus (41, S. 183).

Setzt man hier beyspielsweise $n = 7$ und braucht man für ${}^7\mathfrak{J}$ die dortige (S. 183) erste lexikographische Darstellung, welche die eingeschriebenen Winkel hat, so darf man um $j^7\mathfrak{J}$ zu haben, nur allen dortigen Complexionen die zugehörigen Versetzungszahlen vorschreiben. Jene äußerst leichte combinatorische Darstellung giebt aber nicht blos die Involution zur Summe 7, sondern auch die zu den Summen 6, 5, 4, 3, 2, 1 zugleich mit, so, daß man die Complexionen aller niedrigern Involutionen durch die der höhern zugleich mit gefunden hat, daher man aus $p^m \varkappa (n+1)$ die vorhergehenden $p^m \varkappa n$, $p^m \varkappa (n-1)$ ... und auf ähnliche Art auch $p^m \varkappa (n+2)$, $p^m \varkappa (n+3)$ u. s. w. auf die leichteste Art darstellen kann.

Noch vortheilhafter ist es, wenn man mehrere Coefficienten, nach der Ordnung herstellen soll, die Complexionen des höchsten sogleich nach der figürlichen Darstellung in (68. S. 204) anzuordnen, und den dortigen Complexionen in den Fächern neben den Potenzen von b, die Versetzungszahlen beyzufügen, die auch für alle Coefficienten $p^m \varkappa (n+1)$ dieselben bleiben. Und so kann man daraus alle niedrigere Werthe für vorhergehende Coefficienten mit größter Leichtigkeit schaffen (71).

197. Das Substitutionsverfahren bleibt hier ganz zurück. Herr Etatsrath Tetens hat gewiß alles geleistet, was die Analysis bey dieser Aufgabe, auf den bisher bekannten Wegen, nur immer zu leisten vermag. Die Auflösung des Problems, nach diesem seinem Verfahren, ist auch unstreitig unter allen nicht-combinatorischen die leichteste in der Ausübung; nur allein die combinatorischen (meine Classenauflösung, so wie die Moivrische und Boscovichische lexikographischen, nach der von mir im Archiv der Mathematik [H. IV. S. 385 u. f.] gegebenen Darstellung) gehen ihr an Leichtigkeit und Kürze der Entwickelung und Anordnung, so wie an Mannichfaltigkeit, das Gefundene verschiedentlich weiter (nicht blos dafür, wofür man es gesucht hatte) zu benutzen, vor. Der Grund liegt darinn, daß keine andere Methode im Stande ist, das Wesentliche combinatorischer Involutionen darzustellen oder zu erreichen. Das lehrt unter andern meine Abhandlung (Arch. der Math. H. III. S. 319 — 336) sehr deutlich und anschaulich. Ich will aus ihr blos auf §. 6 (S. 323 — 325) verweisen; man wird, was dort in Beziehung auf die continuirlichen Brüche gesagt worden ist, leicht auf die Potenzcoefficienten anwenden, weil die lexikographischen Involutionen $^{n}\mathfrak{J}$ (41, S. 183) auf die ich mich hier beziehe, mit den dortigen Involutionen ähnlich sind, und beyde, wie die eingezeichneten Winkel

sogleich nachweisen, auf dieselbe Art gebraucht und benutzt werden.

198. Es läßt sich zwischen Herrn Tetens und Dan. Bernoullis Verfahren (Arch. a. a. O. S. 331 — 335) in Vergleichung mit meinem combinatorisch-involutorischen, eine sehr genaue Parallele ziehen.

a) Beide sind Annäherungen zu dem involutorischen. Bey Herrn Tetens ist es eine Folge davon, daß er mit mir von einerley Grundformel ausgeht (152) und auf seinem Wege alles so nach der Ordnung sucht, wie ich auf dem meinigen (S. 255); Bernoullis Abkürzung (Arch. a. a. O. S. 331, 17) durch Beyfügung der zugehörigen Buchstaben zu den bereits gefundenen Complexionen (Ebendas. S. 331, 18) ist schon ein wirkliches Combiniren der Elemente, das selbst durch die gewählte Stellung derselben sich empfiehlt (Ebend. S. 333, 21) und schon gutgeordnete Complexionen in einer gutgeordneten Folge giebt — aber noch keine Involution — wohin nur noch ein unbeträchtlich kleiner Schritt, oder, wenn man will, ein überaus großer Sprung (man kann beides sagen und beides rechtfertigen [Ebend. S. 333, 22 und 330, 15]) zu thun übrig war.

b) Herr Tetens glaubt, seine blos analytische Formel, wie er sie nennt, gebe die gesuchten Theile der Coefficienten auf dem kürzesten Wege, es könne keine kürzere Methode geben (S. 18, 11); Dan. Bernoulli (Arch. a. a. O. S. 332, 19) nennt die von ihm angegebene Abkürzung des gewöhnlichen Verfahrens, praestantissimum compendium, und bemerkt, der Weg, den er hier gehe, sey der natürlichste von allen, die man nur einschlagen könne. Sehr wahr und sehr richtig, von beiden Seiten! Beide Verfahren nehmlich sind offenbar die leichtesten, welche die Analysis wählen kann, so lange sie die Vortheile der com-

binatorisch-involutorischen Methode nicht kennt, oder selbige bey ihren Auflösungen nicht gebrauchen will. Der Nutzen der letztern, der Herrn Prof. Klügel gleich anfangs sehr deutlich einleuchtete (Note c zu S. 52) ist nun durch so viele Anwendungen bereits hinlänglich bewährt, selbst durch die Darstellungen (S. 202 und S. 204) noch mehr erhöhet worden. Auf eben dem Wege kann man auch die Variationsinvolutionen, und die bey den continuirlichen Brüchen hier und da im Archiv gebrauchte (und das. S. 31, 8) in einer Aufgabe aufgestellte und andere Involutionen vollkommner, und für die Ausübung noch brauchbarer machen.

199. Noch muß ich eines wichtigen Vorzuges der combinatorisch-analytischen Formeln und Anordnungen gedenken, daß nehmlich die Beweise der in solchen Formeln dargestellten Sätze gewöhnlich sehr kurz und leicht ausfallen. Man lese Herrn Tetens (S. 26 — 32, §. 14, 15) gegebenen Beweis seiner allgemeinen Formel (S. 13) für ganze positive Exponenten m (für negative und gebrochene Exponenten wird (§. 16) ein anderer Beweis beygebracht) und vergleiche solchen mit dem meinigen (von S. 228 — 233. Ich habe nehmlich hier den Beweis für den Produktensatz (118) mit eingeschlossen, weil ich solchen in dem Beweise des Polynomialpotenzenproblems (125) als bekannt voraussetze). Noch auffallender zeigt sich die Sache bey der Vergleichung der Sätze (S. 34, 17 und S. 237, 143) und ihrer Beweise (S. 36 — 38 — 40 und S. 239), wo man den Beweis des viel zusammengesetztern Satzes dennoch leichter und kürzer finden wird, als den des einfachern und weniger zusammengesetzten. Der so leichte Uebergang von den combinatorischen Hülfs- und Vorbereitungssätzen auf diejenigen, die durch sie erwiesen werden sollen, hat auch Herrn Prof. Klügel eingeleuchtet, welcher für die Potenz $(a + b + c + d + \&c)^m$

$= p^m$, nach einigen vorgängigen combinatorischen Vorbereitungen dafür, sogleich (S. 67) zum Vortrage der combinatorischen Formel für p^m fortgeht, mit der ausdrücklichen Aeußerung, die Richtigkeit der Formel erhelle schon aus den Vorbereitungen, ohne daß ein Beweis nöthig wäre. Dies zugleich als neue Bestätigung jenes Satzes (223, II) die unmittelbarste (und also am leichtesten zu übersehende) Anwendung der Combinationslehre auf die Analysis zeige sich bey dem allgemeinen Potenzen- (und Produkten-) probleme.

200. Herr von Prasse hat in seiner neuerlich herausgegebenen combinatorisch-analytischen Schrift (Note m, S. 86) von dem Polynomialtheorem und seiner combinatorischen Darstellung nach Classen, ausführlich (S. 2 — 13) gehandelt, auch die Vorstellung des Ganges, wie man nehmlich von der Lokalformel zur combinatorischen und von dieser weiter, zu ihrer Auslegung und Umsetzung in die gewöhnliche algebraische Sprache, fortschreitet, in einer beygefügten Tafel anschaulich vorgelegt; alles in der Absicht, um den Leser mit den combinatorischen Begriffen und ihrer Behandlung und Verarbeitung in der Analysis bekannter zu machen, und so auf den eigentlichen Gegenstand seiner Schrift desto besser vorzubereiten. Herr von Prasse hat die Entwickelung der Complexionen in den einzelnen Classen (Probl. §. IV) an die Bedingung (Probl. §. III) gebunden, Complexionen aus Complexionen, jede nächstfolgende aus der unmittelbar vorhergehenden, abzuleiten. Von einem solchen Verfahren im Allgemeinen, sehe man (hier 16). Es ist nicht rein-combinatorisch; ist aber dort deswegen gewählt worden, weil es die unmittelbare Beziehung, welche Zahlen- und Buchstabencomplexionen, nach dem Zeiger, gegen einander haben, und wie man sich bestimmte Summen bey den Buchstabencomplexionen denken könne, sehr deutlich vor

Augen legt; welches für Anfänger immer nützlich ist. Die hier (41—44) von mir angewiesenen rein-combinatorischen Verfahren, nach welchen man Buchstabencomplexionen hinter einander eben so leicht, als Zahlencomplexionen, für sich darstellen kann, lassen sich leicht nachholen; wiewohl, was die lexikographischen, Combinations- und Variationscomplexionen (hier 43, 36) anbetrifft, Herr von Prasse die involutorischen Auflösungen dafür (§. XIV—XVIII) selbst beygebracht, auch mit ausführlichen Beyspielen belegt hat; wegen der häufigen Anwendungen, die in der Folge davon gemacht werden. Die Allgemeinheit der dortigen Sätze mit ihren Verwickelungen, möchte man wohl umsonst versuchen, durch Substitutionszeichen und Verfahren, so deutlich auszudrücken und so leicht zu entwickeln, als in Herrn von Prassens Schrift, vermittelst combinatorischer Zeichen und Verfahren geschieht.

201. Da dies der Fall bey mehrern, zum Theil sehr verwickelten, Aufgaben ist, auf welche die combinatorische Analysis bereits mit großem Nutzen ist angewendet worden; so muß die von Herrn Etatsrath Tetens (S. 4) vorgelegte so ganz positive Aeußerung „„die „„Combinationsmethode werde durch das Substitutions„„verfahren, nicht nur bey dem Polynomialpotenzenpro„„blem ganz entbehrlich; sondern dies werde sie auch „„bey andern Problemen, wo man seine Zuflucht „„zu ihr genommen habe““ allerdings Jeden befremden, der jene Methode und ihre Anwendung auf analytische Probleme kennt; um so mehr, da man den oben (147, 150) angeführten Umständen nach, selbst wegen der Entfernung des Wohnorts, annehmen kann, Herr Tetens sey mit dem gegenwärtigen Zustande dieser Wissenschaft nicht hinreichend genug bekannt gewesen. Ich kann mir die Veranlassung zu einem solchen Ausspruche nicht

anders erklären, als wenn ich annehme, Herr **Tetens** stehe in den Gedanken (dasselbe habe auch ich anfänglich geglaubt §. 5. S. 159) die Combinationsmethode erstrecke sich **blos** auf **Potenzen** der Reihen (den symbolismum zwischen diesen und den Combinationen gegebener Dinge hatten schon **Leibnitz** und **Jac. Bernoulli** bemerkt) und auf **solche Probleme**, die mit den Potenzen in **Verbindung** stehen, und selbige als bekannt voraussetzen. Auf den Fall nun, und wenn das Substitutionsverfahren (wie Herr Tetens wirklich dafür gehalten hat) eben die Leichtigkeit und Bequemlichkeit, eben die mannichfaltigen Vortheile bey der Anwendung gewährte, wie meine Combinationsmethode (158, 159) so dürfte man nur überall statt dieser jenes Verfahren gebrauchen; wobey alsdenn das **Combiniren** mit seinen Regeln ganz entbehrlich seyn würde.

202. Allein, so wie Combinationsmethode entschiedene Vorzüge vor dem Substitutionsverfahren, selbst bey dem Potenzenprobleme, hat (156, 157), so zeigen sich solche um so mehr, bey noch viel verwickeltern Aufgaben, die übrigens die von den Potenzen der Reihen voraussetzen. Man suche nur, um sich davon zu überzeugen, aus der Gleichung z. B. $az^3 + bz^5 + cz^7 \ldots = \alpha x^1 + \beta x^2 + \gamma x^3 \ldots$ die Potenz x^s durch z und die gegebenen Coefficienten $a, b, c \ldots$ $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ vermittelst des Substitutionsverfahrens zu bestimmen, wie ich (Paralip. ad Ser. Reverſ. p. XIV. Ex. 4) durch die Combinationsmethode gethan habe; oder man suche, durch Anbringung eben dieses Verfahrens, aus der Gleichung $y = x - zx^{mx}$ den Sin. x durch y und z auszudrücken, wie Herr Prof. Rothe (Arch. der Math. H. IV. S. 448, 26), durch combinatorische Reversion verrichtet hat. Die Schwierigkeit wird sich alsdenn von selbst veroffenbaren. Eben so würde man die schöne Harmonie, welche die combinatorischen Zeichen bey den Sätzen der

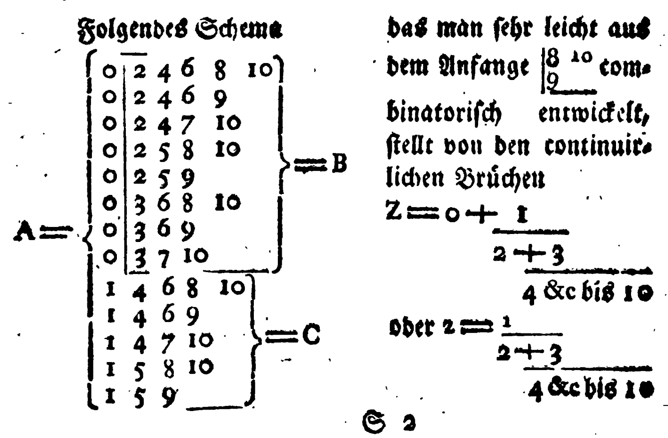
oftterwähnten Praßischen Schrift, den Hülfssätzen sowohl als den Hauptsätzen, bewähren, durch Substitutionszeichen nur zerstören, und ihre Entwickelung durch Substitutionsverfahren erschweren.

203. Ferner: Die Combinationsmethode erstreckt sich nicht blos auf Potenzen von Reihen, sondern sie breitet sich, als ein allgemeines Verfahren über die ganze Analysis aus. So habe ich den allgemeinen weitumfassenden Produktensatz, von welchem der Polynomialsatz nur ein specieller Fall ist, ganz dadurch abgethan (115 — 122 und Nov. Syst. Perm. p. LXIX seq.) auch mit Rücksicht auf Produkte von Potenzen, wo das Substitutionsverfahren weit zurückbleibt (189, 191). Die Methode dient bey Transformationen, Substitutionen und Interpolationen der Reihen, die oft so beschwerlichen Arbeiten dabey zu erleichtern und abzukürzen. Cramer (Introd. à l'Anal. des Lignes courbes p. 656, seq.) und Bezout (Théorie generale des équat. algebr.) haben sie auf die so weitläuftige und schwere Aufgabe der Elimination der Größen angewendet; wovon ich in der Vorrede zu Rüdigeri Specim. de lin. curv. sec. ordinis ausführlich gehandelt und zugleich gezeigt habe, wie das Bezoutische Verfahren in dem dort aufgeführten Probleme ein wirkliches combinatorisches sey, das sich, auf dem Wege, den Cramer eingeschlagen hat, durch Anwendung meiner Zeichen, sehr verkürzen und zugleich ganz deutlich darstellen lasse. So hat auch Herr Doctor Kramp theils in den oben vorgelegten, theils hier noch nicht abgedruckten, noch im Manuscript bey mir befindlichen Aufgaben, sehr mannichfaltigen und wichtigen Gebrauch von der Combinationsmethode gemacht, solche auch bey und auf unbestimmte Aufgaben angewendet. Dahin gehört auch meine Abhandlung über die cyklischen Perioden (Magaz. der Math. 1786. St. III S. 281-324), die

(S. 293 n. 313, Ex.) eine Aufgabe auf einem sehr allgemeinen sehr leichten Wege lößt, die man, ohne combinatorische Hülfe, nicht ohne Schwierigkeit gewältigen kann (Ebend. S. 319, 17).

204. Aber auch andere minder schwierige, und mit dem Potenzenprobleme gleichfalls nicht das geringste gemeinhabende Aufgaben (wo man, wie vorher, fragen könnte, ob und wie sich ein Substitutionsverfahren dabey anbringen lasse) erhalten durch die combinatorische Methode ihre Vollendung. Ich berufe mich hier auf Dan. Bernoulli's Behandlung der Werthe für continuirliche Brüche (Arch. der Math. S. 331—333) wo man deutlich übersieht, daß, nach Anbringung des von ihm sogenannten compendii praestantissimi (Ebend. S. 332, 19), die Analysis aus ihren bis dahin bekannten Mitteln, zu weiterer Abkürzung, zu allgemeinerer Darstellung, zu deutlicher Vorlegung des Bildungs- und Fortgangsgesetzes, nichts weiter hinzuzusetzen vermag, und daß man diese Vortheile zusammen und auf einmal erhält, sobald man die hier vorkommenden Combinationscomplexionen involutorisch ordnet und zusammensetzt (Ebend. S. 334, 335). Die Sache verdient noch etwas genauer erwogen zu werden:

Folgendes Schema das man sehr leicht aus dem Anfange $\left|\begin{matrix}8 & 10\\ 9 & \end{matrix}\right.$ combinatorisch entwickelt, stellt von den continuirlichen Brüchen



$$A = \begin{cases} \left.\begin{matrix} 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 9 & \\ 0 & 2 & 4 & 7 & 10 & \\ 0 & 2 & 5 & 8 & 10 & \\ 0 & 2 & 5 & 9 & & \\ 0 & 3 & 6 & 8 & 10 & \\ 0 & 3 & 6 & 9 & & \\ 0 & 3 & 7 & 10 & & \end{matrix}\right\} = B \\ \left.\begin{matrix} 1 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 1 & 4 & 6 & 9 & \\ 1 & 4 & 7 & 10 & \\ 1 & 5 & 8 & 10 & \\ 1 & 5 & 9 & & \end{matrix}\right\} = C \end{cases}$$

$$Z = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3}{4 \text{ \&c bis } 10}}$$

oder $$2 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{3}{4 \text{ \&c bis } 10}}$$

den 5ten Werth ($v5$) vor (Ebend. S. 185)

Es ist nehmlich $Zv5 = \frac{A}{B}$

und $zv5 = \frac{C}{B}$

Man darf also, wie man deutlich sieht, nur den Zähler von $Zv5$ d.i. hier A suchen, so hat man darinn zugleich den zugehörigen Nenner B, und damit auch des andern Bruches $zv5$ Zähler und Nenner C und B; und aus diesen 5ten Werthen für Z und z, nebenher auch alle vorhergehenden niedrigern, durch involutorische Absonderung. Auch darf man A zu bestimmen, nur die Ordnung o suchen, aus welcher sodann C, oder das übrige von A folgt, wenn man überall die o absondert, und in der Ordnung 2 der übrigen Complexionen überall 1 statt 2 setzt, mit Beybehaltung der übrigen danebenstehenden Zahlen, die hier sämtlich Lokalzeichen sind (Ebend. S. 49, 154).

Diese Vortheile verschaffen die figürlichen Anordnungen involutorischer Darstellungen; und so etwas kann keine andere Methode leisten.

205. Hat doch unser Aller Lehrer und Meister in der Analysis — der große Euler, von den continuirlichen Brüchen geäußert, das Gesetz, nach welchem Zähler und Nenner in den einzelnen Werthen dieser Brüche, aus den Buchstaben sich zusammensetzen, sey nicht leicht durchzusehen (Introd. in Anal. Inf. T. I. §. 359); hat selbst, vornehmlich zu Auffindung dieses Gesetzes, einen eigends dafür eingerichteten Algorithmen ausgedacht (Nov. Comm. Ac. Sc. Petrop. T. IX. p. 53 — 69; vergl. Arch. der Math. H. III. S. 335, 336). Und gleichwohl liegt das tief verborgen geachtete Gesetz in Herrn Eulers (Introd. &c §. 359, 360) — wirklich combinatorischer Auflösung — und wird sogleich durch meine involutorische Behandlung und Anordnung sichtbar.

Ja, es giebt sogar, wie ich gezeigt habe, statt eines einzigen Gesetzes, nach welchem man anfangs fragt, eine überaus große Mannichfaltigkeit darstellender Gesetze für die Werthe solcher Brüche, welche die Combinationslehre, bey dem Reichthume an gleichgültigen, nur im Aeußerlichen verschiedenen, Formen, ohne Schwierigkeit finden lehrt (Arch. der Math. S. 322, 4 — S. 325, 7). Schon diese einzige Aufgabe kann den großen Nutzen combinatorischer, vornehmlich aber involutorischer Formen, einleuchtend darthun; daher ich im Archiv auch vorzüglich bey ihr mich aufgehalten habe (Ebend. H. II. S. 192, 193). Je weiter man den Formularausdruck für das Resultat einer analytischen Aufgabe analysirt, und zur Auflösung bequem einzurichten sucht, je mehr nähert man sich solchen combinatorischen, mehr oder weniger einfachen, Formen, auf die man früher gekommen seyn würde, wenn man gleich anfangs, bey der Auflösung selbst, Rücksicht darauf genommen hätte (4. S. 156). Auf solche Formen nun sind Leibnitz, Jac. Bernoulli, de Moivre, Cramer, Boscovich, Bezout, Castillon und andere, von Zeit zu Zeit verfallen, und haben die Wirksamkeit ihrer Formeln mit Bewunderung gerühmt und anempfohlen. Es war also wohl einmal nöthig, diese Formen genauer kennen zu lernen, das Allgemeine dabey aufzusuchen, eine Theorie der Combinationsmethode festzusetzen, und zu zeigen, wie sich davon eine ganz allgemeine Anwendung in der Analysis machen lasse. Hierher gehören meine lokal- und combinatorischen-Zeichen und Formeln, mit ihrer bestimmten Beziehung auf einander.

206. Der erste Hauptsatz in der Lehre von den Gleichungen, worinn angegeben wird, wie die Coefficienten einer Gleichung aus ihren Wurzeln zusammengesetzt sind (Kästn. An. endl. Gr. 224) wird von Newton (Arithm. Univ. p. 191, Ed. Grav.) und Andern in einer Form ange-

geben, die vollkommen combinatorisch ist. Sein Inhalt ist nehmlich von der Beschaffenheit, daß die combinatorische Form dabey sich von selbst ergiebt. Unmittelbar mit diesem Satze verbindet Newton (das. p. 192) einen andern, vom Verhalten der Coefficienten der Gleichungen zu den Summen der Potenzen ihrer Wurzeln (gewöhnlich der Newtonische genannt) der aber von ihm und allen seinen Nachfolgern in involutorisch-recurrirender Form ausgedrückt worden ist. Beide Sätze sind gleichwohl blos ein paar specielle Fälle, aus unzählig viel andern, die eben so viel Theoreme darstellen würden; wie ich bereits, gelegentlich (*Nov. Syst. Perm.* p. XXVIII unten) erinnert habe. Von diesen Sätzen die erheblichsten auszuwählen; dieselben genauer, nach ihrer direct-combinatorischen und involutorisch-recurrirenden Form, kennen zu lernen; nachzusehen, welche davon bereits bekannt oder neu oder sonst noch nachzusuchen sind, kann nicht anders als wichtig für die Analysis seyn. Hierher gehören Herrn D. Kramp's (S. 105 — 112) und des Herrn von Prasse combinatorisch-analytische Untersuchungen. In des Letztern Schrift (s. S. 86, m) findet man die Glieder, die man sucht, immer auf eine doppelte Art, dependent und independent, angegeben; denn die Combinationsmethode, wie ich bereits anderwärts (Paralip. ad Ser. Reverf. p. XXIV) angemerkt habe, gewährt den Vortheil, die Glieder eben so leicht unabhängig von vorhergehenden, als abhängig von ihnen, auszudrücken. Man hat also für den Gebrauch die Auswahl, und ist auf den Fall nicht, wie bey den gewöhnlichen Methoden, einseitig eingeschränkt.

207. Dies zusammen kann mehr als hinreichend seyn, die Wichtigkeit und Nothwendigkeit combinatorisch-analytischer Untersuchungen festzusetzen. Daß die Erforschung der Anzahl der möglichen Permutationen, Combinationen

nen und Variationen, aus gegebenen Dingen nach vorgeschriebenen Bedingungen, wichtig sey, daran zweifelt Niemand, wegen der interessanten Anwendung die man davon in der so vielumfassenden Wahrscheinlichkeitsberechnung vorlängst gemacht hat. Eben so bin ich fest überzeugt, die von mir und Andern, in dieser Schrift und sonst, gegebenen vielfältigen Proben der combinatorischen Analysis, nebst meinen, theils hier als Einleitung, im Zusammenhange mitgetheilten Betrachtungen, und andern, hier und da zerstreuten Bemerkungen darüber, werden den Werth dieses neuen Zweiges der Analysis entscheidend darthun, und nicht länger zweifeln lassen, daß man — will man anders den vollen Genuß haben, den die Combinationslehre, als Grundwissenschaft, der Analysis gewähren kann — außer der Anzahl der einzelnen Formen oder Fälle, auch die Formen selbst in ihrer wirklichen Darstellung (was ich combinatorische Operationen nenne) kennen müsse. Eigentlich sollte man damit (und das wird man auch künftig thun) den Anfang machen, weil sich die Untersuchungen über die Anzahl der einzelnen Complexionen, aus den Gesetzen, nach denen sie sich darstellen lassen, leichter, als auf dem bisher eingeschlagenen Wege ergeben; und manche Fragen, zu deren Beantwortung man sich oft unendlicher, zum Theil recurrirender, Reihen und Integrationen bedient hat, lassen sich, eben so allgemein ganz elementarisch, zuweilen selbst kürzer, abthun. Ich will, statt aller andern, hier blos Eulers Abhandlung de Partitione Numerorum (Intr. in An. Inf. C. XVI und Nov. Comm. Ac. Sc. Petr. T. III. p. 125 seq.) anführen, und dabey auf Toepf. Comb. Anal. (S. 44, 45), und aufs Arch. d. Math. (H. I. S. 42, 43) verweisen.

208. Noch habe ich eine Schuld abzutragen; und vielleicht ist hier der schicklichste Ort mich ihrer zu entledigen, weil dadurch das Vielumfassende der Combinations-

methode von neuem recht anschaulich sich darstellen läßt. Von der Wichtigkeit der (68. S. 204) aufgestellten allgemeinen Classeninvolution, habe ich bereits dort und in der Folge ausführlich gehandelt. Eben so wichtig in ihrer Art ist auch die allgemeine lexikographische Involution (66. S. 202); diese ist es, auf die ich mich (S. 109. Anm. 1) berufen, und behauptet habe, daß sie das dort angegebene, sehr leichte, Verfahren, an Allgemeinheit und Leichtigkeit noch bey weitem übertreffe.

Wollte man z. B. sogleich die Summen der zehnten Potenzen von zehn Größen Z, Y, X, V &c haben (wie S. 107 nur von vier Potenzen $Z^{10} + Y^{10} + X^{10} + V^{10}$ vorkommen, die von den vorhergehenden niedrigern Potenzen sind abgeleitet worden); so darf man nur (ich will hier, zu Ersparung des Raums, kleine Buchstaben, a, b, c ... statt der großen A, B, C ... auf S. 107 brauchen) in der Involution (S. 202) n = 10 und a, b, c, d ... statt der dortigen b, c, d, e ... setzen: so erhält man

a^9 [a]
a^8 [b]
a^7 [c]
a^6 [b^2, d]
a^5 [bc, e]
a^4 [b^3, bd, c^2, f]
a^3 [b^2c, be, cd, g]
a^2 [b^4, b^2c, bc^2, bf, ce, d^2, h]
a^1 [b^3c, b^2e, bcd, bg, c^3, cf, de, i]
a^0 [b^5, b^3d, b^2c^2, b^2f, bce, bd^2, bh, c^2d, cg, df, e^2, k]

Herr D. Kramp (hier S. 108, c) fordert die einzelnen Glieder der Reihe $Z^n + Y^n + X^n + V^n +$ &c der allgemeinen Form $A^p B^q C^r D^s$ ... für die Bedingungsgleichungen p + q + r + s + &c = m und p + 2q

$+ 3r + 4s + \&c = n$. Die hier angeführte (und für $n = 10$ exempelsweise benutzte) Involution ist das Werkzeug, daß diese Glieder auf dem absolutest leichten Wege finden lehrt. Noch muß man nach Herrn Kramp's Erinnerungen (Ebend. b, d) die einzelnen Produkte aus a, b, c, d . . . so zeichnen, wie sie die Factoren $+a, -b, +c, -d \ldots$ der Scale $+a - b + c - d \ldots$ bestimmen, auch jedem solchen Produkte oder einzelnen Gliede den Zahlencoefficienten $\frac{nK}{m}$ beyfügen; wo K die zugehörige Versetzungszahl (den Polynomialcoefficienten [S. 117, 6; S. 121, 7]), n den Summenexponenten, und m die Anzahl der einzelnen Factoren der einzelnen Glieder bedeutet.

Für $n = 10$ und vier Potenzen $Z^{10} + Y^{10} + X^{10} + V^{10}$, wie bey Herrn Kramp (S. 107), dürfte man aus der obigen Darstellung nur die Complexionen beybehalten, in denen blos a, b, c, d vorkommt, mit Uebergehung der übrigen, die auch e, f, g . . . enthalten. Das gäbe folgende Complexionen, wie sie hier zur Seite stehen.

$a^9 [a]$
$a^8 [b]$
$a^7 [c]$
$a^6 [b^2, d]$
$a^5 [bc]$
$a^4 [b^3, bd, c^2]$
$a^3 [b^2c, cd]$
$a^2 [b^4, b^2d, bc^2, d^2]$
$a^1 [b^3c, bcd, c^3]$
$a^0 [b^5, b^3d, b^2c^2, bd^2, c^2d]$

Man kann aber diese Complexionen, für den obigen Werth $n = 10$, auch aus a, b, c, d unmittelbar construiren, indem man, zu den drey ersten für sich gegebenen Complexionen $a^9[a]$; $a^8[b]$; $a^7[c]$; die folgenden nach der Vorschrift (S. 203) sucht; nehmlich 1) allen in der vorletzten Klammer stehenden Complexionen setzt man b vor, und 2) in denjenigen Complexionen der letzten Klammer, die entweder nur einen Buchstaben, oder zwey ungleiche Anfangsbuchstaben haben, verwechselt man den ersten Buchstaben mit

den nächstfolgenden des Zeigers, so lange dieser folgende c oder d, nicht aber e, f, g... ist, die man hier übergeht.

Ein Beyspiel, wie man die den einzelnen Complexionen noch beyzufügenden Zahlencoefficienten $\frac{nK}{m}$ berichtiget, mag die Complexion $a^3 b^2 c$ abgeben. Hier wäre also $n = 10$ und $m = 6$ folglich $\frac{nK}{m} a^3 b^2 c = \frac{10f}{6} \cdot a^3 b^2 c$ $= \frac{10.60}{6} a^3 b^2 c = 100\, a^3 b^2 c$. Ein ähnliches Verfahren bey den übrigen Complexionen angebracht, und statt a, b, c, d die Factoren $+ A, - B, + C - D$ gesetzt, giebt alles vollkommen, wie (S. 107 unten).

209. Herr D. Kramp hat, nach dem von de Moivre bey recurrirenden Reihen eingeführten Verfahren, die Glieder der Scale $+ A - B + C - D$ einzeln, mit ihren Zeichen, in die vier nächstvorhergehenden Werthe der niedrigern Summen $Z^9 +$ &c; $Z^8 +$ &c; $Z^7 +$ &c; $Z^6 +$ &c; multiplicirt, und daraus die gleichnamigen Produkte zusammenaddirt. Dadurch erhält man zwar die Zahlencoefficienten zugleich mit ihren Zeichen: aber um $Z^{10} + Y^{10} + X^{10} + V^{10}$ zu bestimmen, muß man erst nach und nach alle vorhergehende niedrigern Summen schaffen. Dieses, so wie das Zusammennehmen der gleichartigen Produkte (das, ohne sie besonders abzusetzen, nicht geschehen kann) ist, bey aller Leichtigkeit des Verfahrens an sich, dennoch weitläuftig; und man kann weit eher, auf dem von mir gezeigten involutorischen Wege, die Summe von zehn Potenzen $Z^{10} + X^{10} +$ &c von vorhergehenden Summen independent finden, als von vier Potenzen auf dem gewöhnlichen Moivrischen dependent. Allgemeinheit im Ausdrucke, Leichtigkeit in der Darstellung und

Bequemlichkeit in der Anwendung empfehlen diese Involution, eben so wie jene andere (68), ganz vorzüglich.

Man vergleiche Prasse, Vsus Logar. Infin. p. 19, 27, wo man auch Auskunft findet, woher die Coefficienten $\frac{nK}{m}$ kommen, und wie sich die Sache verhält, wenn statt der einzelnen Größen Z, Y, X, V ... Reihen gegeben sind.

IV. Nothwendigkeit einer in die Analysis einzuführenden allgemeinen, größtentheils combinatorischen, Charakteristik.

210. So wichtig auch der Inhalt des gegenwärtigen Abschnitts an und für sich ist, so kurz kann derselbe gleichwohl hier seyn. Denn einestheils ist die Unzulänglichkeit der bisher eingeführten und gebräuchlichen Zeichen bekannt genug *) anderntheils erhellet, selbst schon aus dieser Schrift, die Art und der Gebrauch der zu empfehlenden neuen Zeichen, und wie dadurch der Grund zu einer vielumfassenden combinatorischen Zeichensprache und einer durch sie möglichen, und immer weiter zu vervollkommnenden, höchstallgemeinen Auflösungskunst, gelegt werden könne. Nachstehende Bemerkungen über diesen so interessanten Gegenstand werden hier nicht überflüssig seyn.

*) Ich könnte, wenn es nöthig wäre, mehrere Stellen aus Herrn Professor Klügels Briefen an mich hier anführen, wo dieser vortrefliche Analyst, von dieser Unzulänglichkeit der bis itzt bekannten und gebräuchlichen Zeichen in der Analysis spricht, und die Einführung zweckmäßiger, bedeutender, leichtverständlicher, die Uebersicht erleichternder, allgemeiner Zeichen, von unabänderlicher Bedeutung, billiget; womit auch die hier nur gelegentlich gethane Aeußerung (S. 66 in der Note, und S. 88) über meine Zeichen übereinstimmt. Es ist bekannt, wie willkührlich die Analysten nicht selten die Zeichen, die sie brauchen, wählen, und daß dabey bis itzt im Allgemeinen noch nichts Bestimmtes ist festgesetzt worden.

211. Bey meiner neuen Bezeichnung und ihrer Anordnung habe ich folgende Bedingungen vor Augen gehabt und zu erreichen gesucht:

a) Die Zeichen müssen zweckmäßig gewählt, kurz, faßlich, und, so viel als möglich, darstellend seyn.

b) Sie müssen das Bestimmte, worauf man bey der bezeichneten Sache zu sehen hat, bestimmt nachweisen, nicht mehr, aber auch nicht weniger.

c) Für gewisse Zahlen, Größen und Formen, die vor andern wichtig sind und im Gebrauche häufig vorkommen, sind eigene, bestimmte und bleibende Zeichen zu wählen, und ein und für allemal festzusetzen.

Dahin gehören die eigentlich combinatorischen, die lokal- und andern (theils im Nov. Syst. Perm. theils im Archiv und selbst in dieser Schrift hier und da erklärten) Zeichen.

d) Die ungleichartigen Dinge müssen jedes für sich gezeichnet, nicht etwa zwey- oder mehrere durch ein Zeichen dargestellt werden.

e) Die Zeichen müssen bey ihrer Zusammensetzung gut zusammen passen, und die vollkommenste Harmonie beweisen. Es muß eine große Menge sehr zusammengesetzter Begriffe, durch wenige, äußerst einfache, leicht verständliche Zeichen kurz und bequem sich darstellen lassen.

f) Die neuen Zeichen müssen endlich die Bezeichnung der übrigen Analysis auf keine Weise beschränken.

Das ist auch der Fall bey meinen combinatorischen, meinen lokal- und andern Zeichen. Noch können A, B, C, D ... Α, Β, Γ, Δ ... 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇 ... a, b, c, d ...

$\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ a, b, c, d... u. s. w. die Buchstaben großer und kleiner, senkrecht- und schiefstehender Alphabete allen Sprachen, allerley Glieder, Coefficienten und Zahlen, jede willkührliche einfache, oder auch, wie man will, zusammengesetzte, Größe ausdrücken. Nur mit gewissen Abzeichen (Accenten, Zahlen, Buchstaben) auf gewisse Art versehen, in gewisser Verbindung mit einander, bekommen sie eine, von der gewöhnlichen abweichende, festgesetzte Bedeutung.

Einige Beyspiele werden das alles am besten erläutern.

212. In meinem Ausdrucke für $p^m \varkappa (n+1)$, den Herr Professor Klügel (S. 70) anführt, setze man z. B. $n=8$, so erhellet sogleich, daß der $(8+1)$te oder 9te Coefficient der Potenz p^m aus folgenden vier Bestandtheilen zusammengesezt ist:

1) aus den Binomialcoefficienten

$^m\mathfrak{A}, \quad ^m\mathfrak{B}, \quad ^m\mathfrak{C}, \quad ^m\mathfrak{D} \ldots\ldots {}^m\mathfrak{H}$

2) aus den Potenzen

$a^{m-1} \quad a^{m-2} \quad a^{m-3} \quad a^{m-4} \ldots\ldots a^{m-8}$

3) aus den Combinationsclassen

$^8A \quad ^8B \quad ^8C \quad ^8D \ldots\ldots {}^8H$

10) aus den Versetzungszahlen

a b c d ..... h

Hier sind $a^{m-1}, a^{m-2} \ldots$ auf die gewöhnliche Art gezeichnete Potenzen von a. Die übrigen Zeichen beziehen sich auf Zahlen und Größen bestimmter Formen, die, weil sie in den Auflösungen der Aufgaben unzählige mal vorkommen, immer auf eine und dieselbe Art von mir dargestellt werden. Die lateinischen senkrechten großen

(Versal) Buchstaben, mit dem Summenexponenten oben linker Hand, ^8A, ^8B, ^8C ... stellen Combinationsclassen zur Summe 8 (die erste, zweyte, dritte... u. s. w.) vor, wo die Zahlen 1, 2, 3 ... sich auf die Buchstaben b, c, d... beziehen, wie solches der der Formel (S. 70) beygefügte Zeiger nachweiset. Diesen sind Binomial- und Polynomialcoefficienten (Versetzungszahlen) zugeordnet, von denen jene sich auf ganze Classen, diese auf einzelne Complexionen der Classen beziehen; und aus dieser Ursache sind auch die erstern mit großen, die andern mit kleinen deutschen Buchstaben gezeichnet. Bey den Binomialcoefficienten zeigt der große deutsche Buchstabe, die Stelle (der erste, zweyte, dritte...) der kleine lateinische oben linker Hand, den Exponenten an. Sie sind also vollständig gezeichnet. Die kleinen deutschen Buchstaben, in Verbindung mit den Classenzeichen (a^8A, b^8B, c^8C...), beziehen sich, als Versetzungszahlen, auf die einzelnen Complexionen der nebenstehenden Classe, wobey es auf Menge der Factoren, und ob einige derselben wiederholt vorkommen, ankommt. Die Zeichen sind sämtlich so gegen einander abgeglichen, daß die Vereinigung derselben, wie sie hier unter einander stehen, die vollkommenste Harmonie darstellt, die selbst hevristisch wichtig werden kann, und sich bereits so bewiesen hat (Toepf. Combin. Anal. S. 170 u. f.).

213. Bey so sehr zusammengesetzten Begriffen, wie in 211 (und um so mehr bey andern noch weit verwickeltern Aufgaben) vorkommen, ist es wichtig, dem Leser durch eine etwas detaillirte, in bestimmter (der besten) Ordnung zu verfolgende Analyse, zu Hülfe zu kommen. Das kann am besten durch Zurückführung der gewöhnlichen Operationen, auf combinatorische, geschehen, und diese Operationen, will man anders Kürze mit Deutlichkeit vereinigen, müssen mit ihren Zeichen in der Formel selbst aufge-

führt werden, damit man, wegen der vorzunehmenden combinatorischen Arbeiten nicht erst auf andere Zeichen verweisen darf. Auch giebt es eine Menge Relationen zwischen ihnen, die bereits bekannt sind, und gegen einander sich austauschen lassen. Die Combinationstheorie zeigt, wie man die Werthe der vorkommenden combinatorisch zusammenzusetzenden Bestandtheile leicht finden und angeben kann; und so hat die Auflösung der Formel (211) keine Schwierigkeit. Ihr Werth steht bey Herrn Klügel (S. 70) neben I. Die Bedeutung der dortigen (den Potenzen von a vorgesetzten) Binomialcoefficienten ist für sich klar. Was aber daselbst in den Klammern steht, sind die, nach dem Zeiger entwickelten Combinationselemente $a\,{}^8A = i$; $b\,{}^8B = 2bh + 2cg + 2df + e^2$; u. s. w.

214. Nach den Relationen in (196) hätte man statt $a\,{}^8A + b\,{}^8B + c\,{}^8C \ldots$ (in 211) auch $j\,{}^8J$ oder $j\,{}^8\mathfrak{J}$ gebrauchen können. Die Schwierigkeit, welche die Coefficienten ${}^m\mathfrak{A}$, ${}^m\mathfrak{B}$, ${}^m\mathfrak{C} \ldots$ a, b, c ... und die Potenzen a^{m-1}, a^{m-2}, $a^{m-3} \ldots$ (welche dort bestimmten Classen ${}^8A$, ${}^8B$, ${}^8C \ldots$ zugehören) hier machen, wird in (195. S. 266) gehoben, wo also

$$p^m \varkappa(n+1) = \overset{*-1}{({}^m\mathfrak{A}\,a)}\, a^{m-*}\, {}^nJ = \overset{*-1}{({}^m\mathfrak{A})}\, a^{m-*}\, j\,{}^nJ$$

$$p^m \varkappa(n+1) = \overset{*-1}{({}^m\mathfrak{A}\,a)}\, a^{m-*}\, {}^n\mathfrak{J} = \overset{*-1}{({}^m\mathfrak{A})}\, a^{m-*}\, j\,{}^n\mathfrak{J}$$

Man könnte hier die ${}^nJ$ und ${}^n\mathfrak{J}$ mit Herrn Prof. Klügel (S. 59) entwickeln, ohne sich um ihren Ausdruck nach den dabey vorkommenden Classen ${}^nA$, ${}^nB$, ${}^nC \ldots$ oder Ordnungen ${}^n\mathbf{A}$, ${}^n\mathbf{B}$, ${}^n\mathbf{C} \ldots$ (41. S. 183) zu bekümmern, die zwar combinatorischwichtig aber nicht schlechterdings (wenigstens nicht in allen Fällen, wie z. B. bey den obigen beiden Formeln) analytischnothwendig sind. Für $n = 8$ fände man, nach der ersten Formel, alles

so, wie es (S. 70) neben I stehet; und so dienen hier die Classen, selbst den Gang der Sache deutlich nachzuweisen. Minder erheblich, und in vielen Fällen ganz entbehrlich, ist die Bemerkung der Ordnungen bey der Entwickelung von ${}^{n}\mathfrak{J}$, die de Moivre und Boscovich gar nicht einmal kannten, also auch nicht beobachten konnten. So hat sich auch Herr von Prasse, in seiner oft angeführten Schrift, verhalten. Er braucht die Zeichen ${}^{n}\mathfrak{J}$ und ${}^{n}\mathfrak{J}$ häufig, ohne ihre combinatorischen Ordnungen besonders aufzuführen, weil er dort keinen analytischen Gebrauch von ihnen macht. Für ${}^{8}\mathfrak{J}$ fände man die Complexionen (S. 61).

215. Die combinatorisch-analytische Formel, mit dem untergesetzten Zeiger, giebt also jedesmal aufs genaueste an, was für combinatorische Arbeiten man zu verrichten habe, die sich auf bestimmte Verfahren beziehen, wodurch man das zu Suchende findet. Man sieht sogleich, ob und was man permutiren, variiren, oder combiniren soll; ob dabey Wiederholungen verstattet sind oder nicht; ob einzelne Classen oder Summen von Classen; ganze Classen oder nur einzelne Ordnungen derselben, zu nehmen sind; ob Binomial- und Polynomialcoefficienten, und was sonst für andere Zahlen und Größen zugleich mit vorkommen; u. s. w. Alles ist hier so klar und deutlich aufgestellt, daß man sich dabey gar nicht irren kann, alles ist schon so weit vorbereitet (213), daß die endliche Auflösung der Formel nun mit größter Leichtigkeit erfolgt.

So viel im Allgemeinen von den combinatorisch-analytischen Formeln. Eben so wichtig sind in ihrer Art die Lokalformeln, die mit jenen in der genauesten Verbindung stehen (4, S. 157; 140, S. 235, 236; 153, S. 247, 248).

215. Das Moivrische Entwickelungsgesetz für gebrochene Functionen $\frac{p}{q} = \frac{a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \ldots}$ in lokal- und combinatorischen Zeichen ausgedrückt, darzustellen:

Die entwickelte Reihe sey $\dot{A} + \dot{B}x + \dot{C}x^2 + \dot{D}x^3 \ldots$ (die punctirten Buchstaben bedeuten hier willkührlich angenommene Coefficienten. Nov. Syst. Perm. p. XXXIV, 4), so giebt das Moivrische Verfahren

$$\dot{A} = \frac{a}{\alpha}$$

$$\dot{B} = \frac{b - {}^2\overset{qp}{B}}{\alpha} = \frac{b - (qp)\varkappa 1}{\alpha} = {}^3\overset{q^{-1}p}{B} = (q^{-1}p)\varkappa 2$$

$$\dot{C} = \frac{c - {}^3\overset{qp}{B}}{\alpha} = \frac{c - (qp)\varkappa 2}{\alpha} = {}^4\overset{q^{-1}p}{B} = (q^{-1}p)\varkappa 3$$

$$\dot{D} = \frac{d - {}^4\overset{qp}{B}}{\alpha} = \frac{d - (qp)\varkappa 3}{\alpha} = {}^5\overset{q^{-1}p}{B} = (q^{-1}p)\varkappa 4$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\overset{n}{\dot{A}} = \frac{\overset{n}{a} - {}^{n+1}\overset{qp}{B}}{\alpha} = \frac{a - (qp)\varkappa n}{\alpha} = {}^{n+2}\overset{q^{-1}p}{B} = (q^{-1}p)\varkappa(n+1)$$

$$p\left[\overset{1}{\dot{A}}\ \overset{2}{\dot{B}}\ \overset{3}{\dot{C}}\ \overset{4}{\dot{D}} \ldots\right] \qquad p\left[\overset{1}{a}\ \overset{2}{b}\ \overset{3}{c} \ \ldots\right]$$

$$q\left[\beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon \ldots\right] \qquad q\left[q^{-1}\varkappa 1, q^{-1}\varkappa 2, q^{-1}\varkappa 3 \ldots\right]$$

Hier werden die Coefficienten $\dot{B}, \dot{C}, \dot{D} \ldots \overset{n}{\dot{A}}$, vom zweyten bis mit dem $(n+1)$ten, jeder in einem vierfachen Ausdrucke dargestellt. Die beiden ersten (Toepf. Comb. An.

S. 114 und Nov. Syst. p. LIII) zusammengehörigen, sind recurrirend; die beiden letzten (hier 143, I) hingegen, independent. Für beyde sind die Skalen besonders beygefügt. Wegen der letztern ist zu merken, daß

$$q^{-1} \varkappa\, 1 = \frac{1}{\alpha}, \text{ und für die übrigen Coefficienten}$$

$$q^{-1} \varkappa (n+1) = - \frac{\mathfrak{a}^n A}{\alpha^2} + \frac{\mathfrak{b}^n B}{\alpha^3} - \frac{\mathfrak{c}^n C}{\alpha^4} + \frac{\mathfrak{d}^n D}{\alpha^5} - \&c$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & . & . & . \\ \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & . & . & . \end{pmatrix}$$

(139, 129). Daraus folgen die Coefficienten für $\frac{p}{q}$, wie Nov. Syst. Perm. p. LXXX. Dies nur um zu zeigen, wie leicht hier beiderley Ausdrücke (der dependente und independente) sich ergeben, und welche combinatorische Gesetze sie befolgen.

216. Den Hauptsatz in der Lehre von den Gleichungen, das Verhalten der Wurzeln ($x = a$; $x = b$; $x = c$ u. s. w.) einer Gleichung zu den Coefficienten derselben, in combinatorischen Zeichen auszudrücken.

Für m Wurzeln giebt das Produkt von eben so viel Wurzelfactoren ($x - a$; $x - b$; $x - c$; u. s. w.) die Gleichung

$$x^m - A' x^{m-1} + B' x^{m-2} - C' x^{m-3} \ldots \mp \mathfrak{M}' x^{m-m} = 0$$

$$(a \quad b \quad c \quad d \ldots\ldots)$$

Die Classen A', B', C' ... $\mathfrak{M}'$ enthalten hier Combinationes der Elemente a, b, c ... simpliciter, ohne Wiederholungen. Das sehr leichte combinatorische Verfahren dafür, zeigt (Infin. Dign. p. 161). Man übersieht es auch sogleich aus jenem andern mit Wiederholungen

(27. S. 174). Von dem Zusammenhange dieses Satzes mit dem sogenannten Newtonischen (206. S. 278) in dependenter sowohl als independenter Form, Prasse, l. c. p. 44, 45. Die Uebergänge von einem Ausdrucke oder Satze zum andern, sind nach der Combinationsmethode gewöhnlich sehr leicht.

217. Die Verschiedenheit der beiden Formen des polynomischen Lehrsatzes, der **recurrirenden** und **independenten**, anschaulich vorzulegen.

Für $p^m = (a + bz + cz^2 + dz^3 + \&c)^m = (a+q)^m$ ist der $(n+1)$te Coefficient beider Formen, d. i.

$p^m \varkappa (n+1)$ oder	$(a+q)^m \varkappa (n+1)$
in der recurrirenden	in der independenten
$[1(m+1) - n]\, b\, p^m \varkappa n$	${}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1} q^1 \varkappa n$
$+ [2(m+1) - n]\, c\, p^m \varkappa (n-1)$	$+ {}^m\mathfrak{B}\, a^{m-2} q^2 \varkappa (n-1)$
$+ [3(m+1) - n]\, d\, p^m \varkappa (n-2)$	$+ {}^m\mathfrak{C}\, a^{m-3} q^3 \varkappa (n-2)$
$+ [4(m+1) - n]\, e\, p^m \varkappa (n-3)$	$+ {}^m\mathfrak{D}\, a^{m-4} q^4 \varkappa (n-3)$
. .	. .
. .	. .
$\overset{n}{+ nmap^m \varkappa 1}$ / na	$+ {}^m\mathfrak{N}\, a^{m-n} q^n \varkappa 1$
$p[a\ b\ c\ d \ldots]$	$q[b\ c\ d\ e \ldots]$

(Hier ist na ein Divisor in **alle** Glieder über den Strich)

Ist m eine **positive ganze** Zahl, so wird die Menge der Theile von $(a+q)^m \varkappa (n+1)$ auf die Größe der Zahlen n und m gegen einander ankommen. Hierher gehören Herrn Tetens Anmerkungen (6, 7, 8 S. 21, 22).

Der Coefficient linker Hand ist nach Herrn Hofr. **Kästners** Formel (Anal. des Unendl. §. 56, XI; vergl. Infin. Dign. p. 63, 7) ausgedrückt. Die Vergleichung

der beiderley Lokalzeichen (der Kästnerischen und der meinigen) hat auch Herr Prof. Rothe (Form. Ser. Rev. Dem. p. 4. (d)) gegeben. In beiden Formeln werden zwar die $\varkappa(n+1)$ durch $\varkappa n$, $\varkappa(n-1)$, $\varkappa(n-2)$ u. s. w. (die höhern Coefficienten durch die niedrigern) bestimmt; aber in der ersten gehören sie sämtlich zu derselben Potenz p^m, für welche $\varkappa(n+1)$ gesucht wird, in der zweyten hingegen zu den niedrigern Potenzen q^1, q^2, q^3, u. s. w. und so zeigen die Lokalausdrücke (hier 138, 139) mit einem Blicke, woher die Verschiedenheit beider Auflösungen: daß man nämlich in der ersten Formel einen spätern Coefficienten zu finden, alle vorhergehenden, durch die er bestimmt wird, zuvor finden muß; welches bey der zweyten Formel deswegen nicht nothwendig ist, weil (nach 138) $q^1 \varkappa n = a^n \Lambda$; $q^2 \varkappa(n-1) = b^n B$; $q^3 \varkappa(n-2) = c^n C \ldots$ $q^n \varkappa 1 = \mathfrak{n}^n \mathcal{N}$; die Complexionen aber aller Classen zur Summe n ganz independent von jeder andern Zahl sich finden lassen, und die den Classen beyzufügenden Binomialcoefficienten ${}^m\mathfrak{A}$, ${}^m\mathfrak{B}$, ${}^m\mathfrak{C} \ldots$ und Potenzen a^{m-1}, a^{m-2}, $a^{m-3} \ldots$ nicht die geringste Schwierigkeit machen.

Ich nehme bey dieser Vergleichung den Exponenten m ganz allgemein an; denn wenn m eine positive ganze Zahl ist, so lassen sich auch in der recurrirenden Formel die $p^m \varkappa n$, $p^m \varkappa(n-1)$ u. s. w. (nach 138) combinatorisch ausdrücken, und independent behandeln. Doch kann daraus das Resultat nicht so schnell gezogen werden, als wenn man die zweyte Formel dafür gebraucht.

218. Vergleichung der einfachen Substitutionsreihe mit der Potenzreihe; wo nämlich

$$p = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + \&c$$
$$y = \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \&c$$

gegeben ist, und man soll p nach Potenzen von z ausdrücken.

Aus *Infin. Dign*. p. 101, 2 und hier 138

ist $p = ay^{1}\varkappa 1 z^{1} + (ay^{1}\varkappa 2 + by^{2}\varkappa 1)z^{2} + (ay^{1}\varkappa 3 + by^{2}\varkappa 2 + cy^{3}\varkappa 1)z^{3} \ldots$

d. i. $p = aa^{1}Az^{1} + (aa^{2}A + bb^{2}B)z^{2} + (aa^{3}A + bb^{3}B + cc^{3}C)z^{3} \ldots$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \ldots \end{pmatrix}$$

Auch hier bey der Substitutionsreihe ist, so wie bey der Potenzreihe (129, 139) die combinatorische Abkürzung, durch die Classen $a^{n}A$, $b^{n}B$, $c^{n}C \ldots$ möglich, und werden hier die einzelnen Coefficienten a, b, c... der Reihe p (wie dort die $^{m}\mathfrak{A}\, a^{m-1}$, $^{m}\mathfrak{B}\, a^{m-2}$, $^{m}\mathfrak{C}\, a^{m-3} \ldots$) nach der Ordnung in die einzelnen Classen multiplicirt. Das ist die in ihrer vielfachen Anwendung so überaus wichtige harmonische Formel, von welcher ich (5. S. 159) gesprochen habe. Der Name Methodus potentiarum, den ich ihr gegeben habe, rechtfertigt sich hinlänglich durch den Gebrauch. Eine noch allgemeinere Formel (Methodus productorum) steht im *Nov. Syst. Perm*. p. LXXVI. ganz zuletzt. Die nächste Anwendung der Methode der Potenzen betrifft die Entwickelung der gebrochenen Functionen (Infin Dign. p. 102 — 106. Nov. Syst p. LXXVII — LXXXIII) die man hier viel bequemer als auf dem Moivrischen Wege haben kann. Ein sehr merkwürdiges Beyspiel von Entwickelung einer gebrochenen Function, von Herrn de la Grange, wo er das Verfahren dafür nach de Moivre einleitet, die dadurch gefundenen Glieder immer weiter und weiter aus einander setzt, und zuletzt auf ein Gesetz dabey geleitet wird, das er für ganz einfach hält, um die Glieder daraus herzuleiten, und in den gegebenen Größen auszudrücken — dieses Beyspiel in Toepf. Comb. Anal. (S. 116 — 123). Die Coefficienten die Herr de la Grange ganz zuletzt findet, und deren weitere Berechnung er sehr empfiehlt, weil sie für alle mögliche Functionen von x dienten, sind keine andern, als die combinatorischen

Elemente a^1A; a^2A, b^2B; a^3A, b^3B, c^3C; ... meiner Tafel (Infin. Dign. p. 167; Nov. Syst. Perm. p. LIX) Herr de la Grange findet so den Werth der gebrochenen Funktion auf Umwegen (die nicht-combinatorische Analysis konnte hier nicht kürzer zum Zweck gelangen) den meine Combinationsmethode geradezu finden lehrt. Herr de la Grange empfiehlt mehrere Coefficienten, wegen ihrer großen Nützlichkeit in sehr vielen Fällen, durch fortgesetzte Rechnung aufzufinden; meine Methode giebt dieser Coefficienten combinatorisches Gesetz, welches um so wichtiger ist, da unter allen combinatorischen Formen, auf die man bey weiterer Analysirung der Sätze und Formeln treffen kann (205. S. 277) diese zuverlässig, wegen der großen Extension, eine der Erheblichsten und Brauchbarsten ist. Die oben angeführte Stelle aus Toepfers Comb. Anal. verdient nachgelesen und reiflich erwogen zu werden. Auch giebt es noch viel zusammengesetztere gebrochene Funktionen, als die, von welcher hier geredet worden, und welche gleichwohl die combinatorische Methode mit Leichtigkeit entwickelt. Hierher gehört (Infin. Dign. p. 120, 1; Nov. Syst. Perm. p. XLVI, 21; vorzüglich aber Arch. der Math. H. II. S. 227, 8). Die (Infin. Dign. p. 125, 126) dafür beygebrachte Formel von Euler ist, wegen der übergroßen Verwickelung, ganz unbrauchbar. Man kann der combinatorischen Methode keine größere Lobrede halten, als die sich aus der unmittelbaren Vergleichung der Substitutionsverfahren dieser beiden großen Analysten, mit dem combinatorischen, von selbst ergiebt!

219. Hier ist ein Substitutionsverfahren anderer Art, das auf nützliche Relationen, durch Lokalformeln ausgedrückt, führt, und sehr leicht sich übersehen läßt.

Es sey $az^{\mu} + bz^{\mu+\delta} + cz^{\mu+2\delta} \ldots = p$

so ist $p^f = p^f \varkappa 1 z^{\mu f} + p^f \varkappa 2 z^{\mu f + \delta} + p^f \varkappa 3 z^{\mu f + 2\delta} \ldots = q$

und $q^g = q^g \varkappa 1 z^{\mu f g} + q^g \varkappa 2 z^{\mu f g + \delta} + q^g \varkappa 3 z^{\mu f g + 2\delta} \ldots = \int$

und $\int^h = \int^h \varkappa 1 z^{\mu f g h} + \int^h \varkappa 2 z^{\mu f g h + \delta} + \int^h \varkappa 3 z^{\mu f g h + 2\delta} \ldots = t$

&c &c &c &c

Also $t = \int^h = q^{gh} = p^{fgh} = (az^{\mu} + bz^{\mu+2\delta} \ldots)^{fgh}$

und $t^l = \int^{hl} = q^{ghl} = p^{fghl} = (az^{\mu} + bz^{\mu+2\delta} \ldots)^{fghl}$

Folglich $t^l \varkappa (n+1) = \int^{hl} \varkappa (n+1) = q^{ghl} \varkappa (n+1) = p^{fghl} \varkappa (n+1)$

Denn, gleicher Potenzen $t^l = \int^{hl} =$ &c $(n+1)$te Coefficienten, die alle derselben Potenz $z^{\mu f g h l + n\delta}$ zugehören, sind unter sich gleich. Man vergleiche Herrn Prof. Pfaffs (S. 133, 11) aufgestelltes Princip. Solche Relationen sind nützlich, besonders bey der Evectione continua serierum ad Dignitates: Weil $q^{ghl} \varkappa (n+1) = p^{fghl} \varkappa (n+1)$, so ist auch $q^l \varkappa (n+1) = p^{fl} \varkappa (n+1)$; u. s. w.

220. Darstellung der vorzüglichsten Sätze der Umkehrung der Reihen in lokal- und combinatorisch-analytischen Formeln.

I. Recurrirende dependente Formen.

Es sey $z = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + \&c$

Man soll y durch z ausdrücken, oder in der Gleichung

$$y = \dot{\mathfrak{A}}z + \dot{\mathfrak{B}}z^2 + \dot{\mathfrak{C}}z^3 + \dot{\mathfrak{D}}z^4 + \&c$$

Die angenommenen Coefficienten (215. S. 289.)

$\dot{\mathfrak{A}}, \dot{\mathfrak{B}}, \dot{\mathfrak{C}}, \dot{\mathfrak{D}} \ldots$ durch a, b, c, d ... bestimmen.

1. Nach de Moivre (Nov. Syst. Perm. p. XXX) ist

$$\dot{\mathfrak{A}} = \frac{1}{a};\ \dot{\mathfrak{B}} = -\frac{b\mathfrak{b}^2B}{a};\ \dot{\mathfrak{C}} = -\frac{b\mathfrak{b}^3B + c\mathfrak{c}^3C}{a};$$

$$\dot{\mathfrak{D}} = -\frac{b\mathfrak{b}^4B + c\mathfrak{c}^4C + d\mathfrak{d}^4D}{a};\ \dot{\mathfrak{E}} = -\ \&c$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\ \dot{\mathfrak{A}} & \dot{\mathfrak{B}} & \dot{\mathfrak{C}} & \dot{\mathfrak{D}} & \dot{\mathfrak{E}} & \ldots \end{matrix}\right)$$

2. Nach Hindenburg (Nov. Syst. Perm. p. XXXI) ist

$$\dot{\mathfrak{A}} = \frac{1}{a};\ \dot{\mathfrak{B}} = -\frac{\dot{\mathfrak{A}}b}{a^2};\ \dot{\mathfrak{C}} = -\frac{\dot{\mathfrak{A}}c + \dot{\mathfrak{B}}\mathfrak{b}^3B}{a^3};$$

$$\dot{\mathfrak{D}} = -\frac{\dot{\mathfrak{A}}d + \dot{\mathfrak{B}}\mathfrak{b}^4B + \dot{\mathfrak{C}}\mathfrak{c}^4C}{a^4};\ \dot{\mathfrak{E}} = -\ \&c$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\ a & b & c & d & e & \ldots \end{matrix}\right)$$

Hier hat man de Moivre's wörtlich gegebene Vorschrift symbolisch dargestellt; und diese combinatorische Darstellung enthält zugleich das harmonische Fortschreitungsgesetz der angenommenen Coefficienten ganz anschaulich, das de Moivre, weil es ihm an schicklichen Zeichen dazu fehlte, durch einige berechnete Glieder (mehrere findet man in Tempelh. Anfgr. der An. endl. Gr. S. 610 u. f.) nur dunkel nachweisen konnte.

Nach dem von mir (in 2) angegebenen combinatorischen Gesetze, lassen sich die Coefficienten $\dot{\mathfrak{A}}, \dot{\mathfrak{B}}, \dot{\mathfrak{C}}, \dot{\mathfrak{D}} \ldots$ ungemein viel leichter berechnen, als nach de Moivre; denn 1) ist, weil $\dot{\mathfrak{A}} = \frac{1}{a}$, jedes erste Glied im Zähler der Brüche für diese Coefficienten, sogleich gegeben; 2) jedes letzte Glied dieser Zähler hört mit einer niedrigern Combina-

tionsclasse auf, als bey de Moivre; 3) die Combinationsclassen beziehen sich hier auf simpele a, b, c, d . . . ., nicht, wie dort, auf $\dot{\mathfrak{A}}$, $\dot{\mathfrak{B}}$, $\dot{\mathfrak{C}}$, $\dot{\mathfrak{D}}$ . . .; welcher Umstand bey weitem die größte Erleichterung verschafft. Beide Formen sind übrigens von vorhergehenden Coefficienten dependent und recurrirend. Mehreres, was hieher gehört, in Toepf. Comb. Anal. S. 124 — 132.

II. Directe independente Formen.

Es sey $y^l = \alpha x^r + \beta x^{r+d} + \gamma x^{r+2d} + \&c$ gegeben; man soll x^s durch y ausdrücken.

3) Nach Eschenbachs (de Ser. Reverſ. Diſſert. p. 23, 24) combinatorischer Formel für

$$ {}^0m = \frac{s}{r};\ {}^1m = \frac{s+d}{r};\ {}^2m = \frac{s+2d}{r};\ \text{u. s. w.} $$

ist

$$ x^s = \left(\frac{y^l}{\alpha}\right)^{{}^0m} - {}^0m\,\frac{\mathfrak{a}^1 A}{\alpha}\left(\frac{y^l}{\alpha}\right)^{{}^1m} $$

$$ - {}^0m\left[\frac{\mathfrak{a}^2 A}{\alpha} - \frac{{}^2m+1\,\mathfrak{A}\mathfrak{b}^2 B}{2\alpha^2}\right]\left(\frac{y^l}{\alpha}\right)^{{}^2m} $$

$$ - {}^0m\left[\frac{\mathfrak{a}^3 A}{\alpha} - \frac{{}^3m+1\,\mathfrak{A}\mathfrak{b}^3 B}{2\alpha^2} + \frac{{}^3m+2\,\mathfrak{B}\mathfrak{c}^3 C}{3\alpha^3}\right]\left(\frac{y^l}{\alpha}\right)^{{}^3m} - \&c $$

$$ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & . & . & . \\ \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & . & . & . \end{pmatrix} $$

4) Nach Rothe's (Formulae de Ser. Reverſ. Demonſtr. p. 11) Lokalformel (die ${}^0m$, ${}^1m$, ${}^2m$ . . . aus (3) auch hier beybehalten), ist

$$ x^s = \frac{s}{s}\,q^{-{}^0m}\varkappa 1\,y^{{}^0ml} + \frac{s}{s+d}\,q^{-{}^1m}\varkappa 2\,y^{{}^1ml} + \frac{s}{s+2d}\,q^{-{}^2m}\varkappa 3\,y^{{}^2ml} + \&c $$

$$ q[\ \alpha\ \ \beta\ \ \gamma\ \ \delta\ \ \varepsilon\ \ .\ \ .\ \ .\ ] $$

Die Scale ist hier $q[\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots]$, d. i. in dem Ausdrucke für x^s kann statt q jede Reihe gebraucht werden, welche 1) die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ hat, und 2) deren Exponenten der veränderlichen Größe in arithmetischer Progression fortgehen; auf die veränderliche Größe selbst aber, und wie die Progression anfängt und fortgeht — darauf kommt hier gar nichts an. Um also nicht zu beschränken, was in der Sache selbst nicht beschränkt ist, hat Herr Rothe das Wort Scale auf den Fall eingeführt (Rothe l. c. p. 1; meine Paralip. ad Ser. Reverſ. p. IV. Note b und p. XVIII. Note i).

5) Das allgemeine Glied nach Eschenbach (3) ist

$$x^s \rceil (n+1) = -{}^0m \left[\frac{\mathfrak{a}^n A}{\alpha} - \frac{{}^{nm+1}\mathfrak{A}\,\mathfrak{b}^n B}{2\alpha^2} + \frac{{}^{nm+2}\mathfrak{B}\,\mathfrak{c}^n C}{3\alpha^3} - \frac{{}^{nm+3}\mathfrak{C}\,\mathfrak{d}^n D}{4\alpha^4} \ldots \pm \frac{{}^{nm+n-1}\overset{-1}{\mathfrak{N}}\,\mathfrak{n}^n \mathcal{N}}{n\alpha^n} \right] \left(\frac{y^l}{\alpha}\right)^{nm}$$

6) Eine von mir vorgenommene Verwandlung desselben, giebt verkürzt und ganz harmonisch

$$x^s \rceil (n+1) = \frac{{}^0m}{{}^nm} \left[\frac{{}^{-nm}\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}^n A}{\alpha} + \frac{{}^{-nm}\mathfrak{B}\,\mathfrak{b}^n B}{\alpha^2} + \frac{{}^{-nm}\mathfrak{C}\,\mathfrak{c}^n C}{\alpha^3} \ldots \right] \left(\frac{y^l}{\alpha}\right)^{nm}$$

7) Daraus, so wie aus der Formel (4) folgt

$$x^s \rceil (n+1) = \frac{s}{s+nd}\, q^{-\frac{s+nd}{r}}\, \varkappa(n+1).\, y^{\frac{(s+nd)l}{r}}$$

Die Zeiger für (5, 6) und die Scale für (7) sind hier wie bey (3 und 4); auch sind in (7) für ${}^0m, {}^1m, {}^2m \ldots {}^nm$ ihre Werthe (aus 3) gesetzt worden.

Das allgemeine Glied (in 7) enthält die sehr wichtige Reduktion der Coefficienten der Umkehrungsformel

auf Coefficienten der Potenzformel. Ich war, durch die vermißte Harmonie der Binomialcoefficienten mit den Combinationsclassen in der Eschenbachischen Formel (5), zu der harmonischen Verwandlung (6) und durch sie auf die Formel (in 7) geleitet worden (Toepf. comb. Anal. S. 170 — 173 und Taf. VIII). Herrn Prof. Rothe hat ein strenger Beweis des Fortgangsgesetzes der Coefficienten seiner Lokalformel (4) darauf geführt (Rothe l. c. p. 11). Wie diese Reduktion aus einem sehr allgemeinen Satze Herrn de la Grange's sich ableiten lasse, hat Herr Professor Pfaff gezeigt (Arch. der Math. H. I. S. 83—87). Von der Wichtigkeit dieser Reduktion und den Vorzügen der Formel (in 7) vor der unreducirten (in 5) sehe man Rothe l. c. p. 13 — 15; Toepf. S. 176 — 180; auch meine Paralip. ad Ser. Reverſ. p. XIX — XXIII, wo noch einige andere Formenverwandlungen der Lokalfunktion $\frac{{}^{o}m}{{}^{n}m} q^{-nm} \varkappa(n+1)$ vorkommen.

8) Aus (4) folgt sehr leicht (Rothe l. c. p. 21, 22)

$$\log. x = \log. \alpha^{-\frac{1}{r}} y^{\frac{1}{r}} + \frac{1}{d} q^{-\frac{d}{r}} \varkappa 2 y^{\frac{dl}{r}}$$

$$+ \frac{1}{2d} q^{-\frac{2d}{r}} \varkappa 3 y^{\frac{2dl}{r}} \ldots + \frac{1}{nd} q^{-\frac{nd}{r}} \varkappa(n+1) y^{\frac{ndl}{r}} + \ldots$$

(die Gleichung, wie in (3), die Scale, wie in (4)

9) Für die Doppelreihe

$$az^{fr} + bz^{f(r+d)} + cz^{f(r+2d)} + \ldots = \alpha x^{r} + \beta x^{r+d} + \gamma x^{r+2d} + \ldots$$

(nach Eschenbach (l. c. §. VIII) und Rothe (l. c. §. IX) ist

$$x^s \urcorner (n+1)$$

$$= \left\{ \frac{s}{s} q^{-\frac{s}{r}} \varkappa 1 . p^{\frac{s}{r}} \varkappa (n+1) + \frac{s}{s+d} q^{-\frac{s+d}{r}} \varkappa 2 . p^{\frac{s+d}{r}} \varkappa n \right.$$
$$\left. \dots + \frac{s}{s+nd} q^{-\frac{s+nd}{r}} \varkappa (n+1) . p^{\frac{s+nd}{r}} \varkappa 1 \right\} z^{f(s+nd)}$$

$$q[\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots] \quad p[a, b, c, d \dots]$$

Die Formel $x^s \urcorner (n+1)$ wie sie hier steht, ist von Herrn Rothe, der hier die Lokalausdrücke nach der reducirten Form (7) gebraucht hat, anstatt der combinatorischen, in der unreducirten Gestalt (5), die Herr Eschenbach dabey angewendet hatte. Die Lokalausdrücke machen die Formel, bey der großen Verwickelung, die sie hat, viel faßlicher und zum Gebrauche bequemer.

10) Für die allgemeinste Form der Reihen

$$az^l + bz^{l+d} + cz^{l+2d} + \&c = \alpha x^\lambda + \beta x^{\lambda+\delta} + \gamma x^{\lambda+2\delta} + \&c$$

ist $x^s =$ (die Formel dafür; Paral. ad Ser. Reverf. p. III).

Der Ausdruck für x^s kann bey der Allgemeinheit (für jede Werthe von l, d, λ, δ, s) nicht kurz seyn; ich habe mich also hier nur darauf berufen wollen.

11) Die Formel (10) schließt alle vorhergehenden in sich; inzwischen, wo man mit diesen ausreicht, braucht man zu der allgemeinsten seine Zuflucht nicht zu nehmen. Sie wird aber für viele Fälle ganz unentbehrlich, wenn man unnöthige Weitläuftigkeiten (Paral. p. XV, XVI) vermeiden will; daher war ihre Aufstellung nothwendig, und macht den Anfang in den Paralip. ad Ser. Reverf. Die Formeln für die Moivrische und Tempelhofische Form, kann man sehr leicht (aus 9) ableiten. Man findet sie (Paral. p. X, XI). Zuletzt noch ein Paar Beyspiele.

12) Für $az^{\frac{1}{2}} + bz^{\frac{3}{2}} + cz^{\frac{5}{2}} + \&c = \alpha x^{\frac{1}{2}} + \beta x^{\frac{3}{2}} + \gamma x^{\frac{5}{2}} + \&c$ das dritte Glied der Potenz $x^{\frac{1}{2}}$ anzugeben.

Für	f	r	d	s	n	(in 9)
hier	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	2	gesetzt; ist

$$x^{\frac{1}{2}} \urcorner (2+1)$$

$$= [q^{-1} \varkappa 1 . p^{1} \varkappa 3 + \tfrac{1}{3} q^{-3} \varkappa 2 . p^{3} \varkappa 2 + \tfrac{1}{5} q^{-5} \varkappa 3 . p^{5} \varkappa 1] z^{\frac{5}{2}}$$

$$p\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ a & b & c & d & \ldots \end{pmatrix} \quad q\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & \ldots \end{pmatrix}$$

$$= \left[\frac{\overset{p}{a^3 A}}{\alpha^1} + \frac{-5\mathfrak{A} \overset{q}{a^1 A} \overset{p}{c^4 C}}{3\alpha^4} + \left(\frac{-5\mathfrak{A} \overset{q}{a^2 A}}{5\alpha^6} + \frac{-5\mathfrak{B} \overset{q}{b^2 B}}{5\alpha^7} \right) \overset{p}{e^5 E} \right] z^{\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{\alpha^6 c - 3\alpha^3 \beta a^2 b - (\alpha\gamma - 3\beta^2) a^5}{\alpha^7} z^2 \sqrt{z}$$

Die Scalen und Zeiger sind, wie hier p und q nachweisen. Hier ist zugleich der Fall, wo die Combinationsclassen sich auf mehr als eine Reihe beziehen (47); daher die Reihenexponenten q, p überschrieben sind.

13) Für $az^3 + bz^5 + cz^7 + \ldots = \alpha x^1 + \beta x^2 + \gamma x^3 + \ldots$ die Anfangsglieder der Potenz x^s anzugeben.

Die beiden Gleichungen von der Form in (9) abhängig zu machen, müßte man von beiden Seiten Glieder einschieben, und ihre Coefficienten o setzen. Das erschwert die Auflösung gar sehr durch Weitläuftigkeit, in die man dadurch verfällt (192 und Paral. p. XV, XVI). Man vergleiche sie also vielmehr mit der allgemeinsten Form (10), indem man $l = 3$; $d = 2$; $\lambda = \delta = 1$ setzt, so kommt:

$$x^s = \alpha^{-s} a^s z^{3s} - * + s\alpha^{-s} a^{s-1} b z^{3s+2}$$

$$- s\alpha^{-(s+2)} \beta a^{s+1} z^{3s+3} +$$ (mehrere Glieder in meinen Paral. ad Ser. Reverſ. p. XIV.).

14) Aus $az^4 + bz^7 + cz^{10} + \ldots = \alpha x^3 + \beta x^5 + \gamma x^7$ die Potenz x^s zu bestimmen, müßte man eben so der gegebenen Gleichungen Vergleichung mit der allgemeinsten Form (10) anstellen. Das Einschalten von Gliedern und das Nullsetzen ihrer Coefficienten, um sie dadurch von (9) abhängig zu machen, würde zu sehr großen Weitläuftigkeiten und Schwierigkeiten führen, die man durch (10) vermeidet (Paralip. ad Ser. Reverſ. p. XV, XVI).

221. Das mag genug seyn, den Nutzen der Einführung einer allgemeinen Charakteristik von festgesetzter unabänderlicher Form und Bedeutung zu bewähren; solcher Zeichen insbesondere, durch welche die Sätze unter einander so leicht sich vergleichen, die Auflösungen, selbst der verwickeltsten Aufgaben, so deutlich nachweisen, und so bequem verrichten lassen. Eine anschauliche Uebersicht meiner, größtentheils combinatorischen, Zeichen und ihrer Anwendung, geben die Tafeln I, VI, VII, VIII bey Herrn Magister Toepfers combinatorischer Analytik. Das hier Beygebrachte lehrt den Mechanismus dieser Zeichen, ihre Beziehung auf einander, das Verhalten insbesondere der Lokalzeichen gegen die combinatorischen, und dieser gegen die auf gewöhnliche Art ausgedrückten, genauer kennen. Hier werden immer Form und Materie zusammen vorgelegt; jene, durch die lokal- oder combinatorischen Ausdrücke der Formeln, diese, durch die unten beygefügten Scalen oder Zeiger; und so wird man, in Beziehung auf so viele bereits aufgestellte erläuternde Beyspiele, zugleich ersehen, was ich darstellende Zeichen (211, a) nenne, und in wie fern solche auf eine allgemeine Aufnahme Anspruch machen können. Irre ich mich nicht, so habe ich das, was Leibnitz von einer wahren und ächten Verbindungskunst fordert — vt veritas per illam quaſi picta, veluti Machinae ope in charta expreſſa, deprehendatur — nach Möglichkeit erreicht.

Das Directorium hierbey führt die Analysis. Diese läßt ihre Verordnungen durch Lokalformeln ergehen, und überläßt die Vollziehung derselben den combinatorischen. So sind auch hier, wie in jedem wohleingerichteten Staate, die legislative und executive Gewalt zwar getrennt, aber im besten Einverständnisse mit einander. Die Analysis kann nicht deutlicher und vernemlicher sprechen, als in Lokalformeln; ihre Befehle können nicht pünktlicher und promter vollstreckt werden, als durch combinatorische.

222. Die Hauptsache hierbey sind immer die Formen der Größen, die, wie auch Herr Professor Klügel (S. 49) erinnert, den vorzüglichsten Gegenstand der eigentlichen Analysis ausmachen. Eine und dieselbe Größe läßt sich, in Absicht auf die Form, nicht selten auf sehr mannichfaltig verschiedene Arten darstellen und umstalten. Diese Formen lassen sich oft, eine für die andere, substituiren, so daß es ganz gleichgültig ist, welche man gebraucht. Dennoch hat jede ihre eigenthümlichen Vorzüge. Zuweilen wird die bestimmte Art von Form durch die Bedingungen vorgeschrieben; auch lassen sich gewisse Absichten nicht so bequem erreichen, manche Vorschriften gar nicht befolgen, wenn man nicht die zugehörige, dafür passende, Form wählt. Eine genaue Kenntniß solcher Formen und ihrer Anwendung ist also für die Analysis von bedeutender Wichtigkeit. Vor andern sind hier die combinatorischen Involutionen (die lexikographischen vornehmlich, und die, deren Complexionen wie Zahlen fortgehen) die vorzüglichsten; daher auch Herr Prof. Klügel die Darstellung der möglichen Gattungen von Combinationen empfiehlt (S. 89). Es ist so natürlich, einen dahin führenden Weg unvermerkt einzuschlagen, daß sogar verschiedene Analysten diesen Formen sich äußerst genähert haben, wie de la Grange (S. 293, 294)

und Lambert, vorzüglich aber Dan. Bernoulli (Arch. der Math. S. 326 – 330 und S. 333; 22) welcher in dieser Annäherung schon ein praestantissimum compendium erblickte (das. S. 332; 19); Andere haben sie wirklich erreicht und schon benutzt — ohne sie gekannt zu haben — wie de Moivre (das. S. 391; 9) und selbst Euler. Es war daher nothwendig, diese LEGEM NATVRAE, wie sie de Moivre (das. S. 392) nennt, endlich einmal zu enthüllen, deutlich anzugeben, worauf sie, die er nur der Wirkung nach kannte, eigentlich beruhe; wie äußerst einfach diese (größtentheils involutorischen) Gesetze in der Grundlage, wie mannichfaltig der äußern Gestalt nach, wie vielumfassend in der Anwendung sie seyen. Die combinatorische Analysis hat endlich den Schleyer aufgedeckt, und es bleibt hinfort nicht mehr dem blinden Ungefähr überlassen (205), ob und wenn es die Legem Naturae herbeyführen will. Die Spur, auf welcher die Göttinn wandelt, ist hier überall deutlich vorgezeichnet, und kann man sie nunmehr festen und sichern Fußes verfolgen.

Ea est methodorum simplicissimarum ratio, atque natura, ut postremae in mentem veniant, et, nisi aliquanto obstinatiore quaerantur animo, ne veniant quidem.

Boscov. Opp. pert. ad Opt. et Astr. T. II. p. 221. §. 83.





